

## Algebra und Zahlentheorie.

**Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:**

Barba, C.: Polinomi definiti. I. Problemi fondamentali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 410—415 (1937).

Ist  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  ein nicht indefinites (d. h. nicht auf der reellen Achse negatives) Polynom, so ist auch  $\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x + \xi_i)$  nicht in-

definit, sobald die  $\xi_i$  reell sind. Fassen wir  $\xi_i$  als Wurzeln eines Polynoms auf, so ergibt sich ein Verfahren zur Konstruktion von nicht indefiniten Polynomen. Zum Schluß fügt der Verf. einige geometrische Erwägungen hinzu. N. Tschebotarow (Kasan).

Petr, Karel: Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten nach einem Primzahlmodul. Čas. mat. fys. 66, 85—94 (1937).

Um zu erkennen, wie ein ganzzahliges Polynom in modulo  $p$  ( $p$  eine Primzahl) irreduzible Faktoren zerfällt, stellt der Verf. die Gleichungen

$$x^{kp} = c_{k,0} + c_{k,1}x + \dots + c_{k,n-1}x^{n-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

auf, die er als lineare Substitution unter  $x^0, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  auffaßt. Damit unser Polynom in modulo  $p$  irreduzible Faktoren von den Graden  $q_1, q_2, \dots, q_l$  zerfällt, ist notwendig, daß das charakteristische Polynom der Matrix  $\|c_{k,i}\|$  in der Gestalt  $(\lambda^{q_1} - 1)(\lambda^{q_2} - 1) \dots (\lambda^{q_l} - 1)$  darstellbar ist. Ist eine solche Darstellung eindeutig, so ist diese Bedingung auch hinreichend. Das trifft immer zu, falls  $p > n$  gilt. — Die Methode ist durch einige Beispiele erläutert. N. Tschebotarow (Kasan).

Petterson, Erik L.: Einige Irreduzibilitätsbedingungen gewisser Polynome. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 23, 1—16 (1937).

Weitere auf der Betrachtung der Exponentenwerte gegründete Irreduzibilitätskriterien (vgl. dies. Zbl. 11, 387). N. Tschebotarow (Kasan).

Hummel, Paul M.: Proof of a theorem of Lehmer. Amer. J. Math. 59, 50—54 (1937).

Define the  $n$ -ary continued fraction as the  $(n-1)$ -uple sequence

$$\{p_k', p_k'', \dots, p_k^{(n-1)}\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

obtained from the recurrence relations

$$x_k' = p_k' + 1/x_{k+1}^{(n-1)}, \quad x_k^{(i)} = p_k^{(i)} + x_{k+1}^{(i-1)}/x_{k+1}^{(n-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2)$$

where  $x_1', x_1'', \dots, x_1^{(n-1)}$  are any real numbers and the  $p_k^{(i)}$  are chosen according to a certain definite law of selection. The sets

$$p_k \equiv (p_k', p_k'', \dots, p_k^{(n-1)}), \quad x_k \equiv (x_k', x_k'', \dots, x_k^{(n-1)}) \quad (3)$$

are called respectively the  $k$ -th partial and the  $k$ -th complete quotient set. The continued fraction  $(p_1; \dots; p_{l+1}; \dots; p_{l+h})$  is called periodic; it is further said to be linear if

$$p_k^{(i)} = a_i t_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; k = l+1, \dots, l+h). \quad (4)$$

By means of simple matrix considerations the author proves the following theorem. The characteristic equation of a linear  $n$ -ary continued fraction (i.e. the characteristic equation of the matrix  $T_{l+1} \dots T_{l+h}$ , where

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & p_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_k^{(n-1)} \end{pmatrix}$$



remains unaltered if we invert (reverse the order) of the partial quotient sets in a period. This is an extension of a theorem of Lehmer (this Zbl. 2, 333) proved for ternary continued fractions, which, in turn, is an extension of a theorem of Galois dealing with convergent purely periodic binary continued fractions. *J. Shohat.*

### **Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:**

**Neumann, J. v.:** Algebraic theory of continuous geometries. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 16—22 (1937).

Further results of the study begun in two recent notes by the author (this Zbl. 14, 160, 223) are given with brief discussion. Each  $L_\infty$  and each  $L_n$  ( $n \geq 4$ ; cf. loc. cit.) is lattice-isomorphic (i.e., with respect to the set-theoretical relations  $\cap$  and  $\cup$ ) with the system of all principal left ideals of a unique (up to ring isomorphic changes) irreducible regular ring (cf. the author On Regular Rings; this Zbl. 15, 388). Hence each  $L_\infty$  and each such  $L_n$  is associated with a unique commutative division algebra, or field, viz., the center of the ring mentioned. Anisomorphic geometries  $L_n$  may be thus associated with the same field and conceivably this is the case with geometries  $L_\infty$ , but in certain important cases the associated field suffices to determine  $L_\infty$ . A more detailed treatment is promised. *J. L. Dorroh (Marion/Alabama).*

**Taussky, Olga:** Rings with non-commutative addition. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 245—246 (1936).

Let  $G$  be a ring with non-commutative addition. The author shows that the elements of  $G$  which are products generate an abelian group  $P$  under addition. The elements of the commutator group  $G'$  are absolute zero-divisors. If  $G - G'$  is an ordinary ring its multiplication may be extended to a multiplication in  $G$  such that  $G' - P = 0$  if and only if in every coset of  $G - G'$  which is a product a representative may be chosen such that these elements generate a group whose intersection with  $G'$  is 0.

*Jacobson (Princeton).*

**Fitting, Hans:** Die Determinantenideale eines Moduls. Jber. Deutsch. Math.-Ver. 46, 195—228 (1936).

Let  $\mathfrak{M}$  be a finitely generated modulus with  $\mathfrak{o}$  as operator domain where  $\mathfrak{o}$  is any commutative ring with an identity. If  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  is a set of generators of  $\mathfrak{M}$  the  $\kappa$ -th determinant ideal  $\mathfrak{D}_\kappa$  of  $\mathfrak{M}$  is defined as the ideal generated by the  $(s - \kappa)$  rowed minors of the matrices  $A$  (coefficients in  $\mathfrak{o}$ ) such that  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) A = 0$ . If  $\kappa \geq s$   $\mathfrak{D}_\kappa$  is taken to be (1). These ideals are independent of the generators and hence are invariants of  $\mathfrak{M}$ . The  $\mathfrak{D}$ 's of a direct sum may be computed in terms of those of the individual components and if the "order"  $\mathfrak{D}_0 = \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_l$  where  $(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j) = 1$  then  $\mathfrak{M}$  is a direct sum of moduli whose orders are  $\hat{\alpha}_i$ . These results serve as tools in an investigation of rank, complete systems of invariants, relation of determinant ideals of a sub-modulus to those of  $\mathfrak{M}$ . If  $\mathfrak{m}$  is the annihilator of  $\mathfrak{M}$ , i.e. the ideal of elements  $m$  such that  $\alpha m = 0$  for all  $\alpha$  then a necessary and sufficient condition that  $\mathfrak{M}$  be a direct sum of cyclic (generated by a single element) moduli and every sub-modulus of a cyclic sub-modulus be cyclic is that  $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$  be a principal ideal ring. In this case  $\mathfrak{M}$  is a direct sum of  $(\alpha_1), \dots, (\alpha_r)$  where the corresponding annihilators  $i_\varrho$  have the property  $i_1 \subset i_2 \subset \dots$ . The  $i$ 's are a complete set of invariants of  $\mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{D}_\kappa = \prod_{\varrho=k+1}^r i_\varrho$ . In general, however, the  $\mathfrak{D}$ 's do not determine the  $i$ 's. If the ideals in  $\mathfrak{o}$  have unique factorization into products of primes a theorem of Steinitz (Rechteckige Systeme usw. Math. Ann. 72) asserts that  $\mathfrak{M}$  is a direct sum of indecomposable moduli  $u_1, \dots, u_k$  and a modulus  $\mathfrak{G}$  where  $u_i$  is isomorphic to the ideal  $u_i$  of  $\mathfrak{o}$  and  $\mathfrak{G}$  is the set of elements having annihilator  $\neq 0$ . The invariants  $i_\varrho$  are defined for  $\mathfrak{G}$  and these (or the determinant ideals) together with  $k$  and the ideal class of  $u_1 \dots u_k$  form a complete set of invariants for  $\mathfrak{M}$ .

*Jacobson (Princeton).*



**Witt, Ernst: Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik  $p$  vom Grad  $p^n$ . Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik  $p$ .** J. reine angew. Math. 176, 126—140 (1936).

Consider vectors with denumerably infinitely many components  $x_i$ , and let  $p$  be a fixed prime. Then the author defines the sum, difference and product of vectors  $x, y$  such that the components of the resulting vectors are certain polynomials in the components  $x_i, y_j$  with coefficients in the Galois field of  $p$  elements. In particular let the components be in a perfect field  $F$  of characteristic  $p$ . Then the set  $I(F)$  of all vectors is an integral domain whose quotient field  $Q(F)$  is a field of characteristic zero which is complete with respect to a discrete valuation. Moreover  $(p)$  is a prime ideal in  $Q(F)$ , that is  $Q(F)$  is unramified, and the residue-class field of  $Q(F)$  modulo  $(p)$  is equivalent to  $F$ . Conversely let  $k$  be a field with a discrete valuation and a perfect residue-class field  $F$  of characteristic  $p$ . Then if  $k$  has characteristic  $p$  it is a power series field in a variable  $t$  over  $F$ . But when  $k$  has characteristic zero and is complete with respect to the discrete valuation then  $k$  has an invariantly determined subfield  $k'$  equivalent to the  $Q(F)$  above. Also  $(p) = \pi^e$  with  $\pi$  a prime element of  $k$ ,  $k = k'(\pi)$ . The author next considers vectors of length  $n$  and expresses generations of cyclic fields of degree  $p^n$  over  $k$  of characteristic  $p$  in terms of such vectors. He also defines cyclic algebras  $(\alpha|\beta)$ , where  $\alpha \neq 0$  is in  $k$  and  $\beta$  is a vector defining a cyclic field of degree  $p^n$ . Known results on direct products of such cyclic algebras are then expressed in terms of this symbolism. Finally let  $C$  be a perfect field of characteristic  $p$ ,  $k$  be the power series field in  $t$  over  $C$  and let  $\alpha, \beta$  be as above. Then the author defines a residue vector  $(\alpha, \beta)$  and proves the residue formula  $(\alpha|\beta)$  is similar to  $(t|(\alpha, \beta))$ . This result is used to obtain invariants of cyclic algebras of degree  $p^n$  over the power series fields  $k$ .  
Albert (Chicago).

**Witt, Ernst: Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern.** J. reine angew. Math. 176, 153—156 (1936).

Let  $k$  be a field which is complete with respect to a discrete valuation,  $\pi$  be a prime element of  $k$ ,  $F$  be the residue-class field of  $k$  modulo  $(\pi)$ . Assume that  $F$  is perfect,  $Y$  is a cyclic field over  $F$  with generating automorphism  $\sigma$  and  $Z$  is the corresponding unramified cyclic field over  $k$  with generating automorphism  $\sigma$  and residue-class field  $Y$ . Then the cyclic algebra  $(\pi, Z, \sigma)$  is shown to be a ramified normal division algebra over  $k$ . Every normal division algebra  $D$  over  $k$  is shown to be similar to the direct product of this cyclic algebra and an unramified normal division algebra  $S$  over  $k$ . The algebra  $S$  over  $k$  has a residue-class ring  $\Sigma$  over  $F$  which is a normal division algebra over  $F$ . Conversely  $\Sigma$  over  $F$  uniquely determines  $S$  over  $k$  in the sense of equivalence. This result is seen to be of particular interest for algebras  $S$  of degree  $p^n$  over  $k$  when  $F$  has characteristic  $p$ , since in this case  $\Sigma$  necessarily has degree one,  $D$  is similar to the cyclic algebra above. The invariants of the cyclic algebra obtained in an earlier paper (see the prec. rev.) for the case where  $k$  has characteristic  $p$  are now obtained when  $k$  has characteristic zero and contains a  $p^n$  root of unity.  
Albert (Chicago).

**Teichmüller, Oswald: Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper.** J. reine angew. Math. 176, 141—152 (1936).

The paper begins with an exposition of the concepts of fields  $K$  with a discrete valuation, the valuation ring  $I$  of  $K$ , the ideals  $(\pi^n)$  of  $I$  where  $\pi$  is a prime element of  $I$ , and the residue-class field  $F$  of  $K$  modulo  $(\pi)$ . Let  $F$  be imperfect (unvollkommen) of characteristic  $p$ . Then  $K$  may have characteristic  $p$  or zero. In the former case it is shown that  $K$  is the field of all power series with a finite number of negative exponents in an arbitrary prime  $\pi$  over a subfield  $T$  equivalent to  $F$ . In the latter case assume that  $K$  is complete (perfekt). Then there exists a complete unramified subfield of  $K$  with the same residue-class field as  $K$ . But conversely to every imperfect



field  $F$  there exists a complete unramified field of characteristic zero with  $F$  as residue class field. *Albert (Chicago).*

**Teichmüller, Oswald: Zerfallende zyklische  $p$ -Algebren.** J. reine angew. Math. **176**, 157—160 (1936).

The author proves a generalization of a lemma used by Witt in obtaining a residue formula (cf. the first paper of Witt rev. above). Let  $C$  be a perfect sub-field of field  $k$  of characteristic  $p$ ,  $\alpha \neq 0$  in  $k$ ,  $R$  be the ring of all power series  $c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots$  with  $c_i$  in  $C$ . Then if  $\beta$  is a vector of length  $n$  with components in  $R$  the cyclic algebra  $(\alpha|\beta)$  is a total matrix algebra. The author also considers the problem of obtaining all vectors  $\beta$  such that  $(\alpha, \beta) \sim 1$  for fixed  $\alpha \neq 0$  in an arbitrary  $k$  of characteristic  $p$  and obtains a formula for  $\beta$  in terms of the vector symbolism of Witt. *Albert (Chicago).*

**Latimer, Claiborne G.: The quadratic subfields of a generalized quaternion algebra.** Duke math. J. **2**, 681—684 (1936).

The author gives an elementary determination of the quadratic sub-fields of an rational generalized quaternion algebra in terms of the fundamental number of the algebra. *Albert (Chicago).*

**Eichler, Martin: Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren.** J. reine angew. Math. **176**, 192—202 (1937).

Let  $\mathfrak{A}$  be a normal simple algebra of degree  $n$  over the algebraic number field  $K$  and let  $u$  be the product of the (real) infinite prime spots of  $K$  which are ramified in  $\mathfrak{A}$ . The author proves that if  $n > 2$ , or if  $u$  does not contain all the infinite prime spots of  $K$  when  $n = 2$ , an ideal  $\mathfrak{M}$  of  $\mathfrak{A}$  is principal if and only if its reduced norm  $n(\mathfrak{M})$  belongs to the ray (Strahl) mod  $u$  in  $K$ , i.e., if and only if  $n(\mathfrak{M}) = (m)$ , where the conjugates  $m^{(1)}, \dots, m^{(r)}$  of  $m$ , corresponding to the factors of  $u$ , are positive. From this follows the theorem that the class number of  $\mathfrak{A}$  is equal to the ray class number mod  $u$  in  $K$ . Since a prime ideal  $\mathfrak{p}$  of  $K$  is ramified in  $\mathfrak{A}$  if and only if  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{A} \times K_{\mathfrak{p}}$  is not a total matrix algebra, where  $K_{\mathfrak{p}}$  is isomorphic to the field of real numbers for a real infinite  $\mathfrak{p}$ , the theorem gives the class number of  $\mathfrak{A}$  in terms of that of  $K$  in all cases except when  $n = 2$ ,  $K$  is total real, and  $\mathfrak{A}$  has no real splitting field. The proofs are mainly arithmetical as in special cases proved earlier by Schilling ( $\mathfrak{A}$  = total matrix algebra; this Zbl. **12**, 245) and Latimer [ $\mathfrak{A}$  = indefinite rational quaternions; Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 436 (1935), this Zbl. **13**, 50; **40**, 439 (1936); this Zbl. **15**, 390]. *Hull (Ann Arbor).*

### Zahl- und Funktionenkörper:

**Hasse, Helmut: Die Gruppe der  $p^n$ -primären Zahlen für einen Primteiler  $\mathfrak{p}$  von  $p$ .** J. reine angew. Math. **176**, 174—183 (1936).

Let  $p$  be a rational prime,  $m = p^n$ ,  $F$  be an algebraic number field containing a primitive  $m$ -th root of unity  $\zeta$ . Then  $\omega \neq 0$  in  $F$  is called a  $p^n$ -primary quantity of  $F$  if the field  $F(\sqrt[m]{\omega})$  is unramified over  $F$ . The author uses a generalized notion of power of  $\zeta$  and proves that every  $\omega$  is the product of certain explicit generalized powers of  $\zeta$  by the trivial factor  $\alpha^m$ ,  $\alpha$  any quantity of  $F$ . He also uses this power representation to determine the corresponding Artin symbol. *Albert (Chicago).*

**Schmid, Hermann Ludwig: Zur Arithmetik der zyklischen  $p$ -Körper.** J. reine angew. Math. **176**, 161—167 (1936).

Let  $k$  be a perfect field of characteristic  $p$ ,  $K$  be an algebraic extension of finite degree over a simple transcendental extension of  $k$ . Then H. Hasse has developed the arithmetic theory of cyclic fields  $Z$  of degree  $p$  over  $K$  [Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper usw. J. reine angew. Math. **172** (1934); this Zbl. **10**, 5]. The author uses the new vector symbolism of E. Witt and generalizes Hasse's results to the case of cyclic fields of degree  $p^n$  over  $K$ . He also determines which ramification points are Weierstrass points. *Albert (Chicago).*



**Schmid, Hermann Ludwig, und Ernst Witt:** Unverzweigte abelsche Körper vom Exponenten  $p^n$  über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik  $p$ . *J. reine angew. Math.* **176**, 168—173 (1936).

Let  $K$  be an algebraic function field of one indeterminate over an algebraically closed constant coefficient field  $k$  of characteristic  $p$  and let the genus of  $K$  be  $g$ . Then the authors use a certain known integer  $\gamma$  such that  $0 \leq \gamma \leq g$  and prove that the maximal unramified abelian field of exponent  $p^n$  over  $K$  is a direct product of  $\gamma$  cyclic fields all of the same degree  $p^n$ . It is also shown that when  $k$  is absolute-algebraic, the group of the divisor classes of exponent  $p^n$  of  $K$  has degree  $p^n \gamma$  and is a direct product of  $\gamma$  cyclic groups of order  $p^n$ . Finally the condition  $\gamma < g$  is shown to be equivalent to the existence of a total differential in  $K$  which is finite everywhere.

*Albert (Chicago).*

**Pisot, Charles:** Sur la répartition modulo 1 des puissances successives d'un même nombre. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 312—314 (1937).

Verf. spricht ohne Beweis folgenden Satz aus: Es bezeichne  $\varrho > 1$  eine algebraische Zahl, deren Konjugierte absolut  $< 1$  sind. Setzen wir  $\lambda \alpha^n = a_n + \varepsilon_n$ , wobei  $a_n$  ganz,  $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$  ist, und ist  $\sum \varepsilon_n^2$  konvergent, so ist  $\alpha$  algebraisch vom Typ  $\varrho$  und  $\lambda$  eine Zahl des Körpers  $K(\varrho)$ . — Weitere Sätze dieser Note sind mengentheoretischen Verallgemeinerungen dieses Satzes gewidmet.

*N. Tschebotarow (Kasan).*

**Chabauty, Claude:** Séries de puissances à coefficients  $p$ -adiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 942—944 (1937).

Sei  $J_n$  der Ring aller Potenzreihen

$$F = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n},$$

deren Koeffizienten einer endlichen algebraischen Erweiterung des Körpers  $K_p$  der  $p$ -adischen Zahlen angehören und die konvergieren, wenn die  $n$  Veränderlichen selbst in einer solchen Erweiterung liegen und  $p$ -adisch genügend klein sind.  $F$  heiße regulär in bezug auf  $x_n$ , und zwar vom Grad  $l$  in  $x_n$ , wenn für  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$  der Koeffizient von  $x_n^l$  der erste von Null verschiedene in der Potenzreihe  $F$  ist. Analog einer bekannten Weierstrassschen Formel, die sich auf den Fall eines komplexen Koeffizientenbereichs bezieht, zeigt Verf.: „Sei  $F$  aus  $J_n$  regulär in bezug auf  $x_n$  und vom Grad  $l$ . Zu jedem Element  $A$  aus  $J_n$  gibt es dann zwei weitere, eindeutig bestimmte Elemente  $B$  und  $C$  dieses Ringes mit  $A = FB + C$ , so daß  $C$  als Funktion von  $x_n$  ein Polynom vom Grad  $l - 1$  ist.“ Dieses Resultat erlaubt, wohlbekannte Sätze über Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten (s. z. B. W. Rückert, dies. Zbl. **5**, 98), insbesondere über die hierdurch bestimmten Nullstellenmannigfaltigkeiten, auch auf die Elemente von  $J_n$  zu übertragen. Dies ist darum von Interesse, weil nach den Resultaten von Th. Skolem (dies. Zbl. **8**, 105; **11**, 392; **12**, 13) die Theorie der Nullstellen der Elemente von  $J_n$  wichtig für Untersuchungen über gewisse Klassen Diophantischer Gleichungen ist.

*Mahler (Krefeld).*

## **Zahlentheorie:**

**Cipolla, Michele:** Dedotte e controdedotte dei vari ordini di una funzione numerica. *Scritti mat. off. a Luigi Berzolari* 183—193 (1936).

Es sei  $n = \prod_{i=1}^m a_i^{\omega_i}$  und  $a_i$  verschiedene Primzahlen. Folgende zahlentheoretische Funktionen werden definiert:  $\kappa(n) = m$ ;  $\tau(n) = \sum_{i=1}^m \omega_i$ ;  $\alpha_r(n) = 1$  wenn  $\tau(n) = r$  und  $= 0$  wenn  $\tau(n) \neq r$ . Sind  $f$  und  $g$  zahlentheoretische Funktionen, so wird  $\sum_{d|n} f(n) g\left(\frac{n}{d}\right)$  durch  $f \times g$  angedeutet und definiert:  $\partial f = f \times \mu$  (wo  $\mu$  die Möbiussche Funktion ist);  $\int f = \sum_{d|n} f(n)$ ;  $\mu_r(n) = \partial \alpha_r(n)$ .  $D_r g = g \times \mu_r$  wird die  $r$ -te Ableitung von  $g$  genannt



und  $C_r g = g \times v_r$  die  $r$ -te Kontraableitung. Es gilt der Satz:  $D_r \int \int f = C_r f$  und  $C_r \partial \partial f = D_r f$ . Noch andere Funktionen werden benutzt. [Man sehe auch Rev. d. Math. 9; Atti Accad. Gioenia Catania (S. 5a) 8.] N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Haberzette, Mary:** Representation of large integers by cubic polynomials. Amer. J. Math. 59, 55—56 (1937).

Let  $m = 1, 2, 3, 4$ , or  $5$ ,  $t$  a given positive integer;  $t$  prime to  $30$  if  $(h_1, h_2, h_3) = (1, 2, 5)$ ;  $t$  prime to  $6$  if  $(h_1, h_2, h_3) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 5), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4)$  or  $(1, 2, 6)$ . Then all sufficiently large integers are represented by

$$ma^3 + tb^3 + \sum_{i=1}^3 h_i(c_i^3 + d_i^3),$$

the cubes being non-negative. The lemma, that every integer  $\geq 23^3 t$  is represented by  $tb^3 + 6(h_1 x_1^3 + h_2 x_2^3 + h_3 x_3^3)$ , is quoted from the author's dissertation at the University of Chicago. G. Pall (Montreal).

**Segal, B.:** Generalized Waring's problem in connection with the estimation of trigonometrical sums. R. C. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 251—253 (1936).

The values of  $r_0$  and  $\alpha$  (this Zbl. 9, 299) in the generalized Waring problem for  $x_1^c + \dots + x_r^c$  ( $c$  real), can be considerably improved by using Vinogradov's method for estimating sums  $\sigma = \sum \exp 2\pi i f(x)$ , ( $A \leq x \leq B$ ),  $f(x) = z x^c$ . For example, in  $V^{-1} \leq f^{(k)}(x) \leq l V^{-1}$  in the interval  $(A, B)$ , and  $0 \leq V \leq U^2$  ( $l$  constant,  $V$  independent of  $x$ ), then  $\sigma = O(UV^{-e_k})$  if  $k \geq 16$ , where  $e_k = (4k^3 \log k)^{-1}$ . The corresponding values of  $r_0, \alpha$  are given. G. Pall (Montreal).

**Sagen, O. K.:** The integers represented by sets of positive ternary quadratic non-classic forms. Amer. J. Math. 59, 33—42 (1937).

The author considers the set  $\Sigma(d)$  of all non-classic positive ternary quadratic forms with integral coefficients and the same determinant  $d$ . He defines representation and proper representation as in A. A. Albert's paper on classic forms [The integers represented by sets of ternary quadratic forms. Amer. J. Math. 55, 274—292 (1933) this Zbl. 6, 290] and obtains explicit and simple necessary and sufficient conditions on  $a$  and  $d$  that  $\Sigma(d)$  shall represent  $a$ . Albert (Chicago).

**Keller, Ott-Heinrich:** Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln. J. reine angew. Math. 177, 61—64 (1937).

Es seien  $n$  reelle Linearformen  $\xi_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$  gegeben und es sei  $|a_{ik}| = 1$ . Minkowski hat den Satz vermutet: Es gibt stets ganze Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0, 0, \dots, 0$ , so daß  $|\xi_i| < 1$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ , wenn nicht mindestens eine Form lauter ganzzahlige, zueinander teilerfremde Koeffizienten hat. Geometrisch bedeutet dies, daß in einer lückenlosen Erfüllung des  $n$  dimensionalen Raumes mit gitterförmig angeordneten parallelgerichteten kongruenten Würfeln stets Säulen vorkommen müssen. Der Verf. läßt die Voraussetzung der gitterförmigen Anordnung fallen und bemüht sich somit, einen noch allgemeineren Satz zu beweisen. Dies gelingt ihm für  $n = 1, 2, \dots, 6$ , wodurch auch die Minkowskische Vermutung für  $n = 1, 2, \dots, 7, 8$  bewiesen ist. Hofreiter (Wien).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Blumberg, Henry:** Remarks on the inductive principle and related existence theorems. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 852—856 (1936).

Let  $A$  be a given linear order. By an extension of an initial segment  $I$  of  $A$  we understand a segment of  $A$  containing elements of both  $I$  and the complement of  $I$ ,  $A - I$ . If  $E$  is a proper subset of  $A$ , let  $I$  be the set of elements of  $A$  preceding all the elements of  $E$ . The set  $I$  is called the initial segment associated with  $E$ . Then  $I$  is a subset of  $A - I$  and every extension of  $I$  contains elements (or an element) of  $E$ .



An element property  $\alpha$  is inductive for  $A$  if its validity for all the elements of an initial segment  $I$  of  $A$  implies its validity for all the elements of some extension of  $I$ . This leads to the following inductive principle for linear order: If  $A$  is a linear order, and  $\alpha$  is an element-property inductive for  $A$ , every element of  $A$  has property  $\alpha$ . This leads to a form of Borel covering theorem: If  $T$  is a set of segments of the linear order  $A$  such that every initial segment of  $A$  has an extension which is an element of  $T$ , there exists a finite subset of  $T$  having the same property. These concepts are extended to  $n$ -fold orders with similar results. An example is given showing that the inductive principle need not hold for an  $\aleph_0$ -fold order. *Chittenden* (Iowa).

**Braun, Stefania:** Sur une propriété d'ensembles. *Fundam. Math.* **28**, 211—213 (1936).

Beweis (unter Zugrundelegung der Cantorsche Kontinuumhypothese) der Existenz zweier linearer Punktmengen, die beide, nicht aber ihre Durchschnittsmenge, mit jeder abgeschlossenen Menge entweder eine höchstens abzählbare oder eine mindestens perfekte Menge gemeinsamer Punkte haben. Die Eigenschaft war für Beispiele nicht von Mengenpaaren, sondern bloß von unendlichen Mengenfolgen bekannt [N. Lusin, *Fundam. Math.* **10**, 42 (1927)]. *B. Knaster* (Warszawa).

**Braun, Stefania:** Sur l'uniformisation des ensembles fermés. *Fundam. Math.* **28**, 214—218 (1936).

Eine ebene Menge  $E$  heißt nach Lusin durch eine Menge  $U$  (horizontal) uniformisiert, wenn jede  $E$  treffende vertikale Gerade genau einen gemeinsamen Punkt mit  $U$  hat. Jede Borelsche Menge  $E$  kann bekanntlich durch eine zur analytischen komplementäre Menge  $U$  uniformisiert werden; es gibt aber  $G_\delta$ -Mengen bereits unter geometrischen Funktionenbildern („Kurven“)  $y = f(x)$  der I. Baireschen Klasse, welche durch keine analytische Menge  $U$  (vertikal) uniformisiert werden [W. Sierpiński, *Fundam. Math.* **16**, 136 (1930) und N. Lusin, *Mathematica* **4**, 60 (1930)]. Verf. beweist, daß alle abgeschlossenen Mengen  $E$  durch geeignete  $G_\delta$ -Mengen  $U$ , während manche durch keine  $F_\sigma$ -Menge  $U$  uniformisiert werden können. Das letztere gilt insbesondere für die abgeschlossene Hülle des geometrischen Bildes irgendeiner wachsenden Funktion  $f(x)$ , deren Unstetigkeitspunkte dicht liegen. Schließlich ist jede ebene  $F_\sigma$ -Menge  $E$  der Uniformisierung durch eine  $G_{\delta\sigma}$ -Menge  $U$  fähig. *B. Knaster*.

**Mandelbrojt, Szolem:** Principe de régularisation des fonctions. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 400—401 (1937).

Die Funktion  $f(x)$  sei für  $x \geq 0$  definiert, nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt; es sei

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{unt. Grenze } f(\xi) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{unt. Grenze } f(\xi).$$

Es sei  $\omega(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  eine positive, stetige monoton nach  $\infty$  wachsende Funktion.  $E_{t,l}$  bezeichne in der  $(x, y)$ -Ebene die Gesamtheit der Punkte  $0 \leq x \leq \omega(t)$ ,  $y \leq l + tx$ .  $U$  sei die Summe derjenigen Mengen  $E_{t,l}$ , die keinen Punkt  $(x, f(x))$  enthalten,  $P$  sei die Halbebene  $x \geq 0$ ,  $F$  sei der Rand von  $P - U$ .  $F_x$  sei die Menge der Ordinaten derjenigen Punkte von  $F$ , deren Abszisse  $x$  ist; dann wird „die regulierte von  $f$  in bezug auf  $\omega$ “ durch  $F_x^\omega(x) = \text{unt. Grenze } F_x$  definiert; hierbei ist  $x \geq 0$ . Es werden einige Eigenschaften dieser Funktion gegeben und ihre Anwendung angekündigt.

*Otto Szász* (Cincinnati).

**Fréchet, Maurice:** Sur les ensembles compacts de fonctions de carrés sommables. *Acta Litt. Sci. Szeged* **8**, 116—126 (1937).

A family of measurable functions  $G$  is said to be a family of functions equally summable on a set  $J$  if, given an arbitrary  $\varepsilon > 0$ , there exists a positive number  $A$  and a bounded measurable subset  $J_0$  of  $J$  such that  $\int_{J-J_0} |\varphi(x)| dx < \varepsilon$  and  $\int_J |\varphi(x)|_A dx < \varepsilon$  where  $\varphi$  is an arbitrary function of the family  $G$  and  $|\varphi(x)|_A$  is equal to 0 or to  $|\varphi(x)|$  according as  $|\varphi(x)| < A$  or  $|\varphi(x)| \geq A$ . A family of measurable functions  $G$  is said to be a family of functions almost equally continuous on a set  $J$  if, for any  $\varepsilon > 0$ , the



set  $J$  may be subdivided in a finite number of measurable sets  $J_k$  with the property to any function  $\varphi$  of the family  $G$  there corresponds a measurable set  $E_\varphi$  of measure less than  $\varepsilon$  such that the oscillation of  $\varphi$  is less than  $\varepsilon$  on every set  $J_k - E_\varphi$ . The author establishes the following theorems: 1. If  $\{f_n\}$  is a sequence of measurable functions converging in measure on a set  $J$  and if  $\int |f_n|^r dx < +\infty$  (where  $r > 0$  and  $n = 1, 2, \dots$ )

then in order that the sequence  $\{f_n\}$  should converge in mean of order  $p$  on  $J$ , it is necessary and sufficient that the functions  $|f_n|^r$  be equally summable on  $J$ . 2. If  $G$  is a family of functions  $f$  with power  $r > 0$  summable on a set  $J$ , then in order that this family should be compact it is necessary and sufficient that the functions  $f$  should be almost equally continuous and the functions  $|f|^r$  equally summable on  $J$  (by compactness of the family  $G$  is meant that any sequence of functions of that family contains a subsequence which converges in mean of order  $r$ ). Theorem 1 has been established by P. Flamant (C. R. Acad. Sci., Paris 201; this Zbl. 12, 345 and 13, 466) in the case when the set  $J$  is bounded. As concerns Theorem 2, some other conditions for compactness of sets of functions in a space  $L^r$  have been given by A. Kolmogoroff (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1931, 60—63; this Zbl. 2, 385), J. D. Tamarkin [Bull. Amer. Math. Soc. 38, 79—84 (1932); this Zbl. 4, 58] and M. Riesz [Acta Litt. Sci. Szeged 6, 136—142 (1933); this Zbl. 8, 7].

Saks (Warszawa).

**Levi, Beppo:** Sulla definizione dell'integrale. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 173—181 (1936).

L'auteur a donné dans une autre note [Sulla definizione dell'integrale, Ann. di Mat., IV. s. 1 (1923—1924)] une définition directe (sans utiliser la théorie de la mesure) de l'intégrale, et il y a prouvé que cette définition est équivalente avec celle de Lebesgue si la fonction intégrée est bornée et mesurable. G. Vitali [Sulla definizione di integrale della funzioni, Ann. di Mat., IV. s. 2 (1924—1925)] a démontré que l'hypothèse de la mesurabilité est superflue. Il en résulte qu'on peut déduire la théorie de la mesure de Lebesgue en développant la théorie de l'intégrale définie par l'auteur. Pour ce but, dans la présente note l'auteur démontre pour son intégrale le théorème sur l'intégrabilité de suites monotones et le théorème ainsi dit de Fubini. Marcinkiewicz.

**Agnew, R. P.:** Convergence in mean and Lebesgue integration. Amer. Math. Monthly 44, 4—14 (1937).

A popular exposition (without proofs) of certain notions and facts from the theory of Lebesgue integration and its applications to Fourier series. A. Zygmund.

**Ridder, J.:** Reduktion des Doppelintegrals in abstrakten Räumen. Nieuw Arch. Wiskde 19, 31—39 (1936).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 10, 347) wird die Reduktion der Doppelintegrale, die dort nur für nichtnegative Maßfunktionen behandelt war, für Maßfunktionen beliebigen Vorzeichens durchgeführt. B. Jessen (Kopenhagen).

## Analysis.

**Brown, O. E.:** Maximum and minimum values of functions of several variables. Amer. Math. Monthly 44, 161—165 (1937).

**Delsarte, Jean:** Sur une généralisation de la formule de Taylor. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 468—469 (1937).

The note postulates an operator  $\mathfrak{D}$  having the following properties of the derivative operation: (a) it is a linear operator on a linear class  $A$  of functions of the real variable  $x$ ; (b) it has a continuous spectrum  $S$ , two dimensional in the complex plane, which contains the origin; (c) the characteristic functions  $j_\lambda(x)$  such that  $\mathfrak{D}_x j_\lambda(\xi) = \lambda j_\lambda(x)$  are expansible for  $\lambda$  sufficiently small in the form  $\sum_0^\infty \lambda^n \varphi_n(x)$  where  $\varphi_0(0) = 1$ ,  $\varphi_n(0) = 0$ ,  $\varphi_n(x) \in A$ , and  $\mathfrak{D}_x \varphi_n(\xi) = \varphi_{n-1}(x)$ ; (d) the equation  $\mathfrak{D}_y \psi(x, \xi) - \mathfrak{D}_x \psi(\xi, y) = \varphi(x, y)$



has at most one solution in  $A$ , zero for  $y = 0$ , denoted by  $\Im_{xy}\varphi(\xi, \eta)$  when it exists. The generalization of Taylor's theorem then takes the form: if the operator

$$T_x^y = \sum_0^\infty \varphi_n(y) \mathfrak{D}_x^{(n)} \text{ is effective on } f(x), \text{ then}$$

$$T_x^y f = \sum_0^m \varphi_n(y) \mathfrak{D}_x^n f(x) + \Im_{xy}[\varphi_n(\eta) \mathfrak{D}_\xi^{n+1} f(\xi)]. \quad \text{Hildebrandt.}$$

**Gernet, N.: Der Radius des Konvergenzkreises der Reihe von Lagrange.** Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math. Nr 10, 41—47 u. deutsch. Zusammenfassung 48 (1936) [Russisch].

Shows that in order to determine the exact radius of convergence of Lagrange's series for that root of the equation  $y = xf(y)$  which vanishes with  $x$ , it is necessary to discuss the curves  $|f(y)/y| = \text{const.}$  Certain over simple statements (Cauchy is mentioned, we may add Bromwich, Infinite Series, p. 265—266, London 1926) are thus in error. Some illustrative examples are considered.

*Macintyre* (Aberdeen).

**Walther, A.: Anschauliches zur Gibbsschen Erscheinung und zur Annäherung durch arithmetische Mittel.** Math. Z. 42, 355—364 (1937).

Remarques élémentaires sur le phénomène de Gibbs accusé pour  $x \rightarrow 0$  par l'intégrale définie  $\int_0^\infty u^{-1} \sin xu \cdot du$ .

*E. Kogbetliantz* (Téhéran).

**Košliakov, N.: Note on some infinite integrals.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 247—250 (1936).

Certain improper integrals — taken between infinite limits — are considered. Application is made to derive an expression for the sum  $\sum_{n=1}^\infty \tau(n)f(n)$ ,  $\tau(n)$  = number of divisors of  $n$ , also to the functions  $\Gamma(s)$ ,  $\zeta(s)$ . Finally, the functional equation for  $\zeta(s)$  is derived in a very simple manner from the Legendre integral

$$2 \int_0^\infty \sin 2\pi \varrho x \left\{ \frac{1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{2\pi x} \right\} dx = \frac{1}{e^{2\pi \varrho} - 1} - \frac{1}{2\pi \varrho}.$$

*J. Shohat* (Philadelphia).

### **Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen :**

**Bohr, Harald: Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. VII—VIII.** Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 14, Nr 7, 1—24 (1936).

VII. In einer Arbeit von Cameron (dies. Zbl. 13, 263) kommt ein mit früheren Favardschen Untersuchungen zusammenhängendes Kriterium für die Fastperiodizität einer Funktion vor, welches sich dadurch auszeichnet, daß sämtliche Voraussetzungen, die über die Funktion gemacht werden, nur von schwacher Konvergenz, d. h. gleichmäßiger Konvergenz in jedem endlichen Intervall, handeln, im Gegensatz zur Bochner'schen Definition der Fastperiodizität durch Normalität, welche auf starker Konvergenz, d. h. gleichmäßiger Konvergenz im ganzen unendlichen Intervall, beruht. In der vorliegenden Note werden die genannten Voraussetzungen näher analysiert und insbesondere ihre gegenseitige Unabhängigkeit durch Konstruktion geeigneter Beispiele gezeigt.

VIII. Einfacher Beweis eines Satzes von Bochner (dies. Zbl. 8, 12), wonach bei einer vorgegebenen reellen fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  die Funktion  $f(x) = e^{\int_0^x \varphi(x) dx}$  nur

in dem (trivialen) Fall fastperiodisch ist, wo  $\int_0^x \varphi(x) dx$  fastperiodisch ist, und Anwendung

desselben auf die Konstruktion eines einfachen Beispiels einer Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} + \varphi(x)y = 0$  mit reellem fastperiodischem  $\varphi(x)$ , deren Lösungen beschränkt, aber nicht fastperiodisch sind; für rein imaginäres statt reelles  $\varphi(x)$  hatte Bochner (dies. Zbl. 7, 347) schon ein derartiges Beispiel gegeben. (VI. vgl. dies. Zbl. 14, 353.)

*B. Jessen* (Kopenhagen).



**Bohr, Harald, und Børge Jessen:** Über die Umkehrung von analytischen fast-periodischen Funktionen. Math. Ann. 113, 461—488 (1936).

This paper contains a discussion of the inversion problem for almost periodic analytic functions. This problem is equivalent to the theorem: If  $\varphi(x)$  is a.p.,  $\sim \sum A_n \exp(\Lambda_n s)$ , with  $\Lambda_n > 0$ , then the function  $w = s + \varphi(s)$  defines a one-to-one transformation of a half plane  $\sigma < \sigma_1$  of the  $s$ -plane into a region of the  $w$ -plane which contains a half-plane  $\omega < \omega_1$ . In it the inverse function, written in the form  $s = w + \psi(w)$  defines an analytic function  $\psi(w)$ , which is a.p.,  $\psi(w) \sim \sum B_n \exp(M_n w)$ , whose  $M_n$  are again  $> 0$ . The moduls of  $\varphi$  and  $\psi$  are identical. The present proof of this result is based on the geometric consideration used by the same authors (cf. this Zbl. 5, 250) for a simpler result. Several additions to the theorem are proved. Not only the moduls but the semi-moduls (where only non-negative coefficients are considered) of  $\varphi$  and  $\psi$  are identical. In special cases the actual computation of the coefficients of the inverse function is carried through. The results obtained include theorems proved by H. Schmidt (this Zbl. 11, 344) for absolutely convergent a.p. series.

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

**Favard, J.:** Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques. Mat. Tidsskr. B 1936, 81—94.

Die Arbeit behandelt die Abschätzung des absoluten Betrages von Funktionen  $f(x)$  einer reellen Variablen unter der Bedingung, daß die  $n$ -te Ableitung dem Betrage nach  $\leq 1$  ist. Die Fragestellung 1 war bereits von S. Bernstein (dies. Zbl. 11, 396) behandelt worden; von den Fragestellungen 2 und 3 war nur der Fall  $n = 1$  von Bohr (dies. Zbl. 12, 347; 13, 110) und Favard (dies. Zbl. 13, 157) behandelt worden. Die vorliegende Arbeit beruht auf einer weiteren Ausgestaltung der Methode der letztgenannten Arbeit. — 1. Gesucht wird die beste Schranke  $M_n(\omega)$  von  $|f(x)|$ , wenn  $f(x)$  periodisch mit der Periode  $\omega$  ist und den Mittelwert 0 besitzt und  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  ist. Eine nur von  $n$  und  $\omega$  abhängige Schranke ist offenbar vorhanden. Aus der Eulerschen Summenformel ergibt sich, indem  $B_n(z)$  das  $n$ -te Bernoullische Polynom bedeutet,

$$f(x) = -\frac{\omega^n}{n!} \int_0^1 B_n(1-z) f^{(n)}(x + \omega z) dz, \text{ also } = -\frac{\omega^n}{n!} \int_0^1 (B_n(1-z) - a) f^{(n)}(x + \omega z) dz$$

für jedes  $a$ , woraus folgt

$$M_n(\omega) = \min_a \frac{\omega^n}{n!} \int_0^1 |B_n(1-z) - a| dz = \begin{cases} 2 \frac{\omega^n}{(n+1)!} \left[ 2 - \frac{1}{2^n} \right] |B_{n+1}| & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{\omega^n}{n!} \frac{|E_n|}{4^n} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

wo  $B_n$  und  $E_n$  die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen sind. Beide Formeln lassen sich in  $M_n(\omega) = \left(\frac{\omega}{4}\right)^n \frac{|E_n - C_n|}{n!}$  zusammenfassen, wo die Zahlen  $C_n$  durch die symbolische Relation  $(C + 2)^n + C^n = 0$  definiert sind. — 2. Es sei  $\omega = 2\pi$  und  $f(x)$  der weiteren Bedingung unterliegt, daß in ihre Fourierreihe die Glieder mit  $\cos kx$  und  $\sin kx$  für  $k < m$  fehlen. Es wird bewiesen, daß die beste Schranke von  $|f(x)|$  unter diesen Umständen  $M_n\left(\frac{2\pi}{m}\right)$  ist, daß sich also die Funktion für das vorliegende Problem wie eine Funktion der Periode  $\frac{2\pi}{m}$  benimmt, obwohl ihre Periode im allgemeinen  $2\pi$  ist. Trivial ist, daß die Schranke mindestens  $M_n\left(\frac{2\pi}{m}\right)$  ist. Der Beweis beruht darauf, daß für beliebige  $a_k, b_k$

$$f(x) = -\frac{(2\pi)^n}{n!} \int_0^1 \left( B_n(1-z) - a_0 - \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos 2\pi k z + b_k \sin 2\pi k z) \right) f^{(n)}(x + \omega z) dz$$



also

$$|f(x)| \leq \frac{(2\pi)^n}{n!} \int_0^1 \left| B_n(1-z) - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos 2\pi k z + b_k \sin 2\pi k z) \right| dz$$

ist, woraus sich der Satz durch geeignete Wahl der  $a_k, b_k$  ergibt. — 3. Aus diesem Resultat ergibt sich, zunächst für trigonometrische Polynome mit beliebigen Exponenten durch Approximation der Exponenten durch rationale Zahlen, dann für beliebige fastperiodische Funktionen, folgender Satz: Es sei  $f(x) \sim \sum (A_n \cos \Lambda_n x + B_n \sin \Lambda_n x)$  fastperiodisch und  $\Lambda_n \geq \Lambda > 0$  für alle  $n$ ; ferner sei  $f^{(n)}(x)$  fastperiodisch und  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ . Dann ist  $M_n \left( \frac{2\pi}{\Lambda} \right)$  eine, und zwar die beste Schranke von  $|f(x)|$ . Es sei hervorgehoben, daß bereits die Existenz einer nur von  $n$  und  $\Lambda$  abhängigen Schranke nicht trivial ist. — In einer Schlußbemerkung wird auf ähnliche Anwendungen anderer Summenformeln hingewiesen.

B. Jessen (Kopenhagen).

**Favard, J.:** Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1122—1124 (1936).

Ohne Beweis werden mehrere Sätze angegeben, welche die bestmögliche Approximation einer periodischen Funktion  $f(x)$  der Periode  $2\pi$  durch ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $< m$  betreffen. Der erste Satz, der den Typus der Sätze angibt, besagt, daß unter der Annahme  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  die Approximation stets möglich ist mit einem Fehler, der absolut genommen  $\leq M_n(2\pi)m^{-n}$  bleibt, während es Funktionen  $f(x)$  gibt, für welche keine bessere Approximation möglich ist. Vgl. zur Definition von  $M_n(2\pi)$  vorst. Ref.

B. Jessen (Kopenhagen).

### **Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:**

**Arrighi, Gino:** Sull'esistenza di un integrale, quadratico nella velocità, nel problema del moto di un punto nello spazio. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 216—219 (1936).

Die Note diskutiert die oft behandelte Aufgabe, alle Systeme  $x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$  von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bestimmen, die ein in den  $x'_1, x'_2, x'_3$  quadratisches Polynom als erstes Integral zulassen.

Wintner (Baltimore).

**Ghosh, S.:** On the solution of Laplace's equation suitable for problems relating to two spheres touching each other. Bull. Calcutta Math. Soc. **28**, 193—198 (1936).

The solution in question can be obtained from the known solution in cylindrical coordinates by inversion. A corresponding solution of the equation for the stream function in flow symmetrical about an axis is given.

H. Bateman (Pasadena).

**Ornstein, L. S.:** Calculation of the scattering of light from a system of simultaneous differential equations. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 207—212 (1937).

Das Problem der Strahlungsverteilung in einem Strahlungsfelde läßt sich, wenn die Strahlung innen in vorgeschriebener Weise gestreut wird und am Rande vorgegeben ist, auf eine Integralgleichung oder ein System solcher zurückführen. Sie läßt sich in der Regel durch die Neumannsche Reihe auflösen. Man kann jedoch, wie dies auch schon früher getan worden ist, ein direktes Verfahren rekursiver Approximationen angeben, bei welchem jeder Schritt sich physikalisch interpretieren läßt. Die Schritte bestehen in der Betrachtung der keinmal, einmal, zweimal usw. durch Streuung abgelenkten Lichtstrahlen. Verf. stellt dies systematisch dar, und zwar an Hand des planparallel und des kugelsymmetrisch geschichteten Strahlungsfeldes. Auch wird der Fall richtungsabhängiger Streuung betrachtet.

E. Hopf (Leipzig).

**Dubreil-Jacotin, M.-L.:** Sur les théorèmes d'existence relatifs aux ondes permanentes périodiques à deux dimensions dans les liquides hétérogènes. J. Math. pures appl., IX. s. **16**, 43—67 (1937).

The two dimensional fluid domain is supposed to be bounded below by a straight line and above by a line  $L$  which in problem  $A$  is parallel to the first and horizontal while in problem  $B$  it is very nearly a horizontal straight line parallel to the first its wavy form being supposed to travel with constant velocity  $c$ . By choosing axes moving



with this wavy form the stream-function  $\Psi(X, Y)$  is zero on  $L$  and has the constant value  $q$  on the bottom  $Y = H$ . It satisfies, moreover an equation

$$h(\Psi)\Delta\Psi - h'(\Psi)\{gY - \frac{1}{2}[(\partial\Psi/\partial X)^2 + (\partial\Psi/\partial Y)^2]\} = h(\Psi)f_1(\Psi)$$

in which  $h(\Psi)$  is the density and  $f_1(\Psi)$  an arbitrary function. This equation is transformed by taking  $\Psi$  as new independent variable, the dependent variable of the transformed equation being a small quantity  $v(X, \Psi)$  such that  $Y = A\Psi + v(X, \Psi)$ , where  $A = H/q$ . The new equation is written in the form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Psi^2} + A^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + A(\Psi) \left[ A^3 g v + \frac{\partial v}{\partial \Psi} \right] + A^3 f_2(\Psi) = F_2,$$

where  $F_2$  is a polynomial of the second order in  $v$ , its derivatives of the first two orders and the arbitrary function  $f_2(\Psi)$  which is of the same order of smallness as  $v$  and is supposed to be continuous in the sense of Hölder. The form of  $F_2$  is of no importance in the work except that  $F_2$  is an even function of  $X$  like  $v$ . — By a new change of variables  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,  $\lambda \log r = -2\pi A\Psi$ ,  $\lambda \alpha = 2\pi X$  the equation is brought to the form.

$$\Delta v + B(r)[pv - xv_x - yv_y] - f(r) = F$$

where  $C = pB(r)$  is a positive quantity. From this it follows that the Dirichlet problem for this equation has not necessarily a single solution as it has for the equation  $\Delta v = 0$  governing the homogeneous case. The conclusion seems to be that the wave problem has no solution for an arbitrary value of the parameter  $p$  (equal to  $\lambda g/2\pi c^2$ , where is the wave-length and  $c$  the velocity of propagation) but in the neighbourhood of a doubly infinite set of values of  $p$  and for any function  $f$  given arbitrarily there is generally just one non trivial wave which is symmetrical and a function of a parameter. Owing to the second transformation the Dirichlet problem is for a ring instead of an infinite strip.

H. Bateman (Pasadena).

Seth, B. R.: On waves in canals of variable depth. *Philos. Mag.*, VII. s. 23, 106—114 (1937).

For a section consisting of a pair of lines each inclined at an angle  $\pi/m$  to the horizontal the author writes  $\Phi + i\Psi = F(z^m) \cos(\sigma t + \varepsilon)$  where  $\Psi$  is the stream function. Expanding  $F(z^m)$  in ascending powers of  $z^{1/m}$  and retaining only terms which satisfy the condition  $\Psi = 0$  for  $m\theta = \pi$  and  $m\theta = (m-1)\pi$ , where  $z = re^{i\theta}$ , he separates the series for  $\Phi$  and  $\Psi$  into two parts one containing only sines of multiples of  $\frac{1}{2}\theta$ , the other only cosines of multiples of  $\frac{1}{2}\theta$ . The condition at the free surface leads to an infinite determinant and different cases are discussed. H. Bateman.

### Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Izumi, Shin-ichi, and Tosio Kitagawa: On some integral equations. III. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 18, 565—571 (1936).

Generalization of a previous result of the authors concerning the representation of solutions of  $f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$  by Dirichlet series, the exponents being roots of the characteristic equation  $2z - (e^z - e^{-z}) = 0$ . — Similarly for solutions of  $f^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{-1}^1 f^{(\nu)}(x+t) d\varphi_{\nu}(t)$ . (II. see this Zbl. 14, 310.) Bockner (Princeton).

Northrop, E. P.: Note on a singular integral. II. *Duke math. J.* 2, 617—625 (1936).

This note extends previous results of the author (this Zbl. 10, 17) from the case of  $L_2$  to the case of  $L_r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ . Roughly stated, the earlier necessary and sufficient conditions for the case  $r = 2$  now split into necessary conditions for  $1 < r < 2$  and sufficient conditions for  $2 < r < \infty$ . Writing  $1/p + 1/q = 1$ ,  $1 < p < 2$ , we may give a typical result as follows: In order that

$$T_m(x, f) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-u; m) f(u) du \in L_q$$



and  $\|T_m(x, f) - f(x)\|_q \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty$  whenever  $f$  is the Fourier transform in  $L_q$  of a function in  $L_p$ , it is sufficient that (I)  $K(x; m) \in L_p$  for every  $m$ ; (II) the superior limit as  $m \rightarrow \infty$  of the essential least upper bound of  $|TK(x; m)|$  is finite;

(III)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |TK(x, m) - 1|^p dx = 0$  for arbitrary finite  $a$  and  $b$ . Several useful

variations on the indicated conditions are proved or suggested. *M. H. Stone.*

**Ballou, D. H.: Functions representable by two Laplace integrals.** Duke math. J. 2, 722—732 (1936).

It is known that the function  $(-z)^{-1/2} \cot(-z)^{1/2}$  can be expressed as a Laplace integral in two different ways using the partial fraction series and the exponential series of the cotangent. The resulting identity gives one of the linear transformations of  $\vartheta_3(0, \tau)$ . The author applies this idea to other meromorphic simply periodic functions with simple poles, but restricts himself essentially to linear combinations of cotangents. The resulting identities are all consequences of the basic formula (12) p. 725 which is known from the theory of general elliptic theta functions [cf. Krazer, Math. Ann. 43, 436 (1893)].

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Sakurai, Tokio: Fourier integral and some physical problems.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 706—726 (1936).

### **Funktionalanalysis, Funktionalräume:**

**Birkhoff, Garret: On the integration of operators.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 11—13 (1937).

The author proposes the problem of finding a vector field  $Z$  such that if  $x(t)$  is any solution of the system  $dx_i/dt = \sum_{h=1}^r \varrho_h(t) X_i^h(x_1, \dots, x_n)$  [ $i = 1, \dots, n$ ], and  $y(t)$  is any solution of  $dy_i/dt = Z_i(y_1, \dots, y_n)$ , with  $x_i(0) = y_i(0)$  for every  $i$ , then  $x_i(1) = y_i(1)$  for every  $i$ , and transforms it into the question of finding a single fixed operator  $Z$  whose net effect over the interval  $(0, 1)$  is the same as that of the operation  $X(t) = \sum_{h=1}^r \varrho_h(t) X^h$ , the vector fields  $X^1, \dots, X^r$  being regarded as infinitesimal transformations in the sense of Lie. He states that  $Z$  is the sum of the formal series  $Z = y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + \dots, Z_n$  being Poisson brackets in the  $X^h$  containing  $w(Z_n)$  letters, and  $y_n$  being scalars, obtained by finding the derivatives  $\varrho'_i(t)$  and then performing at most  $w(Z_n)$  multiplications and quadratures, in the following three cases: (a) when the  $X^h$  and their commutators generate a finite continuous group, and are near enough the null operator, (b) when the  $X^h$  are analytical operators, leaving the origin fixed, with a similar restriction as in (a), and (c) when the  $X^h$  are linear operators on a Banach space, with a small enough modulus.

*Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Gowurin, Mark: Über die Stieltjesche Integration abstrakter Funktionen.** Fundam. Math. 27, 254—268 (1936).

This paper deals with the theory and applications of generalized Stieltjes integrals, with special reference to linear spaces. If  $X$  and  $Z$  are normed vector spaces,  $Z$  being complete, the linear operations from  $X$  to  $Z$  constitute a normed vector space  $Y$ . The result of applying a linear operation  $y \in Y$  to an element  $x \in X$  is an element  $z \in Z$  which is conveniently denoted by  $x \cdot y = y \cdot x$ . The spaces  $X, Y$  bear an essentially symmetrical relation to  $Z$ . If  $t$  is a real variable, the Riemann-Stieltjes

integral  $\int_a^b x(t) \cdot dy(t)$  is defined as the limit (if it exists) of sums  $\sum_{i=1}^{n-1} x(\tau_i) \cdot [y(t_{i+1}) - y(t_i)]$ ;

and, if  $y$  is an additive function of measurable sets, the Radon-Stieltjes integral

$\int_E x(t) \cdot y(dE)$  is defined as the limit (if it exists) of similar sums  $\sum_{i=1}^n x(\tau_i) \cdot y(e_i)$ .



These integrals possess most of the familiar formal properties. Sufficient conditions for the existence of the first are:  $x(t)$  is continuous;  $y(t)$  has the  $w$ -property,

$$\sup_{x_1, \dots, x_n \in X} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot [y(t_{i+1}) - y(t_i)] \right\| / \max_{i=1, \dots, n} \|x_i\| \right\} = W_a^b y < \infty.$$

Sufficient conditions for the existence of the second are:  $x(t)$  is totally measurable — that is, is the uniform limit of a sequence of measurable functions each having only a finite number of distinct values;  $y(e)$  has the  $w$ -property

$$\sup_{x_1, \dots, x_n \in X} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot y(e_i) \right\| / \max_{i=1, \dots, n} \|x_i\| \right\} = W_E y < \infty.$$

If  $\int_a^b x(t) \cdot dy(t)$  exists for all continuous  $x(t)$ , then  $y$  has the  $w$ -property. Since  $W_E y \leq Var_E y = \sup \sum_{i=1}^n \|y(e_i)\|$ , the relation  $Var_E y < \infty$  implies  $W_E y < \infty$ ; but the relations  $Var_E y = \infty$ ,  $W_E y < \infty$  are consistent even though, in case  $X, Y, Z$  coincide with the space of real numbers the equation  $Var_E y = W_E y$  is true. The author proves: the general linear operation  $U[F]$  from the space  $M_X[C_X]$  of all totally-measurable functions  $\eta(t)$  [of all continuous functions  $\xi(t)$ ] with values in  $X$  is given by  $\int_E \eta(t) \cdot y(dE)$  [by  $\int_a^b \xi(t) \cdot dy(t)$ ] where  $y$  has the  $w$ -property. *M. H. Stone.*

**Rellich, Franz: Störungstheorie der Spektralzerlegung. I. Analytische Störung der isolierten Punkteigenwerte eines beschränkten Operators.** Math. Ann. 113, 600—619 (1936).

The chief result of this paper may be stated roughly as the proposition (P): if  $A(\varepsilon)$  is a bounded symmetric operator in Hilbert space which near  $\varepsilon = 0$  depends analytically on the real parameter  $\varepsilon$ , and if  $\lambda$  is an isolated  $h$ -fold ( $h < \infty$ ) characteristic value of  $A(0)$  with a corresponding set  $\varphi_1, \dots, \varphi_h$  of characteristic elements, — then for small  $\varepsilon$  the spectrum of  $A(\varepsilon)$  in the neighborhood of  $\lambda$  consists of  $h$  characteristic values  $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_h(\varepsilon)$ , not necessarily distinct, with corresponding orthonormal characteristic elements  $\varphi_1(\varepsilon), \dots, \varphi_h(\varepsilon)$ , all depending analytically upon  $\varepsilon$  and reducing for  $\varepsilon = 0$  to  $\lambda_1(0) = \dots = \lambda_h(0) = \lambda$ ,  $\varphi_1(0) = \varphi_1, \dots, \varphi_h(0) = \varphi_h$ . The proof falls into five steps: (I—II) it is shown that the existence (and analytic form) of  $\lambda_1(\varepsilon)$ ,  $\varphi_1(\varepsilon)$  is equivalent to the existence (and analytic form) of a particular analytic solution  $\mu = \mu(\varepsilon)$ ,  $c_1 = c_1(\varepsilon), \dots, c_h = c_h(\varepsilon)$  of a system of equations

$$(S) \quad \sum_{k=1}^h c_k f_{ik}(\mu, \varepsilon) = 0, \quad i = 1, \dots, h$$

where  $f_{ik}$  is analytic in  $\mu$  and  $\varepsilon$  and the determinant  $F(\mu, \varepsilon)$  reduces for  $\varepsilon = 0$  to  $F(\mu, 0) = \mu^h$  (in case  $h = 1$ , this observation was made by Lichtenstein [Math. Z. 7, 205—211 (1920)]); (III) the existence of the desired solution of (S) is established with the aid of the Weierstrass preparation theorem (Vorbereitungssatz) and the local uniformisation theorem of Puiseux; (IV) by a reduction process from  $h$  to  $h - 1$ ,  $h - 1$  to  $h - 2, \dots, 2$  to  $1$ , the existence of  $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_h(\varepsilon)$ ,  $\varphi_1(\varepsilon), \dots, \varphi_h(\varepsilon)$  is obtained from (I—III); (V) by a similar reduction process (essentially from the case of general  $h$  to the special case  $h = 0$ ) it is shown that near  $\lambda$  the spectrum of  $A(\varepsilon)$  contains only the characteristic values  $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_h(\varepsilon)$ . — The division of the paper into sections is as follows: § 1 establishes the analogue of (P) for complex finite-dimensional Euclidean space; § 2 gives examples showing that (P) becomes false (even in the Euclidean case) (1) if  $h > 1$  and the single parameter  $\varepsilon$  is replaced by two or more, (2) if “analyticity” is replaced throughout by “infinite differentiability”; § 3 provides the necessary definitions and elementary properties of “analyticity” (for elements and operators); § 4 gives the proof of (P); § 5 gives an example to show the necessity of the assumption  $h < \infty$ ; § 6 extends (P) to the case of several parameters under



the (essential) restriction  $h = 1$ ; and § 7 brings a specialization of (P) to the case of Fredholm integral operators.

*M. H. Stone* (Cambridge, Mass.).

**Rellich, Franz:** Störungstheorie der Spektralzerlegung. II. Mitt. Stetige Abhängigkeit der Spektralschar von einem Parameter. *Math. Ann.* **113**, 677—685 (1937).

This paper establishes several variations of the proposition (P) of the I. Mitteilung (reviewed above), replacing everywhere "analyticity" by "continuity". In all but one of these variations  $\varepsilon$  is to be considered as restricted to the values  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0$ .

The sense in which  $A(\varepsilon)$  is taken to be continuous at  $\varepsilon = 0$  is different in different cases: if  $A_n = A(1/n)$  and  $A = A(0)$  are bounded, then  $A_n$  is said to converge to  $A$  if  $A_n x \rightarrow A x$  for every  $x$ ; if the bound of  $A_n - A$  tends to zero, then  $A_n$  is said to converge uniformly to  $A$ ; and appropriate (but quite technical) corresponding definitions are introduced for the case where  $A_n$  and  $A$  are self-adjoint but not necessarily bounded, requiring essentially that  $A_n x \rightarrow A x$  for "enough" elements  $x$ . If  $A_n, A$  be self-adjoint operators with the respective resolutions of the identity  $E_n(\lambda), E(\lambda)$ , then some typical results may be stated as follows: if  $A_n$  converges to  $A$  and if  $\lambda$  is not a characteristic value of  $A$ , then  $E_n(\lambda - 0)$  converges to  $E(\lambda - 0)$ ; if  $A_n$  converges uniformly to  $A$  and if  $\lambda$  is an isolated  $h$ -fold characteristic value of  $A$ ,  $h < \infty$ , then for large  $n$  the spectrum of  $A_n$  near  $\lambda$  consists of characteristic values  $\lambda_1(n), \dots, \lambda_h(n)$ , not necessarily distinct, with  $\lambda_k(n) \rightarrow \lambda$ ,  $k = 1, \dots, h$ ; and  $E_n(\lambda_h + 0) - E_n(\lambda_1 - 0)$  converges uniformly to  $E(\lambda + 0) - E(\lambda - 0)$ . *M. H. Stone* (Cambridge, Mass.).

**Hölder, Ernst:** Über die Vielfachheiten gestörter Eigenwerte. *Math. Ann.* **113**, 620—628 (1936).

In this paper, the author eliminates the step (IV) in the proof of (P) in the paper of Rellich reviewed above, applying a method of Weierstrass (*Werke* **1**, 233—246), to prove directly the existence of  $h$  independent solutions of (S) and thence the existence of the desired  $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_h(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \dots, \varphi_h(\varepsilon)$ . *M. H. Stone* (Cambridge, Mass.).

**Vulich, B.:** On a generalized notion of convergence in a Banach space. *Ann. of Math.*, II. s. **38**, 156—174 (1937).

L'auteur appelle un espace linéaire  $E$  espace normé  $(K)$ , lorsqu'à chaque système fini d'éléments de  $E$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , correspond un nombre non-négatif  $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|$ , dit norme  $(K)$  de ce système. Cette norme est supposée assujettie à certaines conditions, dont il s'ensuit, en particulier, que le nombre  $\|x\| = \|(x)\|$ , où  $x$  est un élément quelconque de  $E$ , peut être regardé comme une norme ordinaire d'éléments de  $E$ . Ainsi tout espace normé  $(K)$  peut être considéré à la fois comme un espace normé ordinaire [espace  $(B)$  de Banach]. — La notion de norme  $(K)$  conduit à celle de convergence  $(K)$  comme il suit: une suite d'éléments  $\{x_n\}$  converge  $(K)$  vers un élément  $x$  en symboles  $x_n \rightarrow_K x$ , lorsque le nombre  $\|(x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)\|$  tend vers 0 avec  $n, m \rightarrow \infty$ . L'auteur établit les relations entre la convergence  $(K)$  et la convergence ordinaire (correspondant à la norme ordinaire). Une opération additive [dont le domaine et le contredomaine sont des espaces normés  $(K)$ ] est dite continue  $(K)$ , lorsque  $x_n \rightarrow_K x_0$  entraîne toujours  $U(x_n) \rightarrow_K U(x_0)$ ; elle est dite continue  $(K)$  fortement, lorsque la dernière relation a lieu chaque fois que  $x_n \rightarrow x_0$  au sens ordinaire. L'auteur étudie spécialement les opérations qui se rattachent aux espaces  $L^r$  (de fonctions de  $r$ -ième puissance sommable) et aux espaces analogues de suites numériques (la norme dans  $L^r$  est définie par la formule  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left[ \int_0^1 \max(|x_1(t)|^r, \dots, |x_n(t)|^r) dt \right]^{1/r}$ ). A titre d'exemple, citons le résultat suivant: Si  $K(s, t)$  est une fonction mesurable sur le carré  $[0, 1; 0, 1]$  telle que  $|K(s, t)| \leq C(s)$  où  $C(s) \in L^r$ ,  $r \geq 1$ , la formule  $U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$  où  $x(t) \in L^1$ , définit une transformation fortement continue  $(K)$  de  $L^1$  en un ensemble situé dans l'espace  $L^r$ .

*Saks* (Warszawa).



**Taylor, A. E.:** Sur la théorie des fonctions analytiques dans les espaces abstraits. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1228—1230 (1936).

This note announces without proof the outlines of a theory of analytic functions from a normed complex vector space  $E$  to a second such space  $E'$  which, in addition, is complete,  $f$  being called analytic in an open set  $D$  if it is continuous in  $D$  and has at each point of  $D$  a Gâteaux differential  $\delta f(x, y) = \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x + \lambda y) \right]_{\lambda=0}$ . The theory as outlined includes generalizations of the Cauchy integral theory, the theory of power series, and the Cauchy-Riemann differential equations. M. H. Stone.

### **Funktionentheorie:**

**Biggeri, Carlos:** Sulle singolarità delle funzioni analitiche. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 209—214 (1936).

In Verallgemeinerung bekannter Resultate wird der Satz bewiesen: Hat die Potenzreihe  $\sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty \varrho_n e^{i\varphi_n} z^n$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_n \leq \frac{\pi}{2}$ , den Konvergenzradius 1, und ist  $\varrho_n \cos \varphi_n \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1$ , so ist  $z = 1$  eine singuläre Stelle der durch die Potenzreihe definierten analytischen Funktion; hierbei ist für  $a_n = 0$   $\varphi_n = 0$  zu setzen. Analoge Sätze werden für Dirichletsche Reihen und Laplacesche Integrale formuliert; ihr Beweis soll in einer anderen Arbeit geliefert werden. Es sei bemerkt, daß der obige Satz und seine Verallgemeinerung auf Dirichletsche Reihen auch aus Satz III der in Math. Ann. **85** (1922) erschienenen Arbeit (Über Singularitäten...) des Ref. leicht folgt. Otto Szász (Cincinnati).

**Levi, Bepo:** Osservazioni riguardo alla precedente nota di C. Biggeri. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 214—215 (1936).

Ergänzende literarische und sachliche Bemerkungen zu der vorsteh. besprochenen Arbeit. Otto Szász (Cincinnati).

**Ketchum, P. W.:** On the expansion of a function analytic at distinct points. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 115—121 (1937).

Soient  $\theta_k(x)$  une fonction régulière au point  $x = a_k$  et  $y$  possédant un zéro simple,  $C_\delta^{(k)}$  la courbe simple  $|\theta_k(x)| = \delta$  entourant ce point ( $k = 1, 2, \dots, \nu$ ;  $\delta > 0$ , suffisamment petit); soit encore  $F_{n,m}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 1, 2, \dots, \nu$ ) un système des fonctions tel que  $F_{n,m}(x)$  est régulière à l'intérieur de  $C_R^{(k)}$  ( $R > 0$ ) et possède un zéro d'ordre  $n$  ou supérieur à  $n$  au point  $a_k$  suivant que l'on a  $k = m$  ou  $k \neq m$ . Les développements ici considérés sont de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\nu} \alpha_{n,m} F_{n,m}(x),$$

la fonction  $f(x)$  étant supposée régulière dans les domaines  $C_\rho^{(k)}$  ( $\rho > 0$ ;  $k = 1, 2, \dots, \nu$ ), la convergence est absolue et uniforme dans les domaines intérieurs à des courbes  $C_r^{(k)}$ , à condition que l'on ait  $r < \min(R, \rho)$ . — Dans le cas où  $\nu = 1$ ,  $\theta(x) = x$ , on obtient un résultat dû à G. S. Ketchum [Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 213 (1936); ce Zbl. **15**, 29].

W. Gontcharoff (Moscou).

**Rosenblatt, Alfredo:** Über die konforme Abbildung ebener beschränkter variabler Bereiche. Rev. Ci., Lima **38**, Nr 418, 75—102 (1936) [Spanisch].

If  $x = \psi(z, \lambda)$  with  $\psi(0, \lambda) = 0$  and  $\psi'(0, \lambda) > 0$  conformally represents  $|z| < 1$  on the interior of the curve  $x = e^{i\theta} \{1 + \varphi(\theta, \lambda)\}$  "near" the circle, there is a correspondence between the functions  $\psi$  and  $\varphi$  regarded as functions of  $\lambda$ . Lichtenstein's integral equation theory of conformal representation is used to reduce this question to that of integral equations involving a parameter. Conditions (continuity of  $\varphi$  and a Hölder condition) are given which ensure that  $\psi(z, \lambda)$  is a continuous function of  $\lambda$  uniformly for  $z$  in the closed circle  $|z| \leq 1$ , it being remarked that the second condition may be dispensed with if a theorem of Rado [Acta Szeged **1** (1922—1923)] is used. Reviewer



adds that an intermediate normalisation  $\bar{V}_0(0) = 0$ , and a lemma on inverse functions involving a parameter, perhaps deserve explicit mention. *Macintyre* (Aberdeen).

**Koebe, P.: Wesen der Kontinuitätsmethode.** Deutsche Math. **1**, 859—879 (1936).

Zusammenfassende Darstellung nach zwei Vorträgen von 1913 und 1935. Es werden die Schwierigkeiten bei der Poincaré-Kleinschen Kontinuitätsmethode und ihre Überwindung auseinandergesetzt. Die Vorteile der Kleinschen Methode der offenen Kontinua gegenüber der Poincaréschen Methode der abgeschl. Kontinua wird betont. Es wird gezeigt, wie wesentlich der Brouwersche Satz von der Gebietsinvarianz einerseits und der Koebesche Verzerrungssatz andererseits für die strenge Durchführung der Beweise sind. *Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

**Popken, J.: Eine arithmetische Eigenschaft gewisser ganzer Funktionen. I.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **40**, 142—150 (1937).

Sei  $P_\nu(x)$  für  $\nu = 1, 2, \dots, n$  ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und höchstens vom Grad  $\nu - 1$  bzw. für  $\nu = n$  genau vom Grad  $n - 1$ . Nach O. Perron [Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen. Math. Ann. **66**, 479 ff. (1908)] hat die Differentialgleichung

$$Df(x) \equiv f(x) + \sum_{\nu=1}^n P_\nu(x)f^{(\nu)}(x) = 0$$

bis auf einen konstanten Faktor genau eine Lösung  $f(x) \equiv 0$ , die in  $x$  ganz transzendent ist. Eine Stelle  $x_0$  heiße regulär, wenn dort  $P_n(x_0) \neq 0$  ist. Nach Perron (l. c. S. 484) sind an jeder regulären rationalen Stelle  $x_0$  die  $n$  Zahlen  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$  linear unabhängig in bezug auf den Körper  $R$  der rationalen Zahlen. Verf. leitet ein entsprechendes allgemeineres Ergebnis über die Funktionswerte an endlich vielen rationalen Stellen, von denen mindestens eine regulär ist, ab; hierin ist als einfache Folgerung der etwas speziellere folgende Satz enthalten: „Sind  $x_0, x_1, \dots, x_r$  rationale reguläre, voneinander verschiedene Stellen, so sind die  $n(r+1)$  Funktionswerte

$$f^{(\nu)}(x_\rho) \quad \left( \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \dots, n-1 \\ \rho = 0, 1, \dots, r \end{array} \right)$$

linear unabhängig in bezug auf  $R$ .“ — In der vorliegenden ersten Mitteilung wird das Popkensche Resultat aus drei Hilfssätzen A, B und C abgeleitet, die Aussagen über den Operator  $D$  bzw. über hiermit verknüpfte Teilbarkeits- und Größenabschätzungen machen. Diese Hilfssätze werden in zwei weiteren Noten bewiesen werden. *Mahler* (Krefeld).

**Cherubino, Salvatore: Funzioni olomorfe di matrici.** Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **6**, 41—70 (1937).

An abstract of this paper has appeared [C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1892—1894 (1936); this Zbl. **14**, 290]. If  $x = s + t$ ,  $y = \sigma + \tau$  are matric variables in a complex matric algebra  $A$  and  $s, \sigma$  are hermitian and  $t, \tau$  skew-hermitian, then  $y$  is a holomorphic function of  $x$  if  $\partial\sigma/\partial s = \partial\tau/\partial t$  is hermitian and  $\partial\sigma/\partial t = \partial\tau/\partial s$  is skew-hermitian. The author shows how these conditions are obtainable when  $A$  is commutative from the definition of analytic function of Scheffers [C. R. Acad. Sci., Paris **116**, 1114 and 1242 (1893)] or by the definition of total derivative of Spampinato (this Zbl. **12**, 101). For  $A$  commutative, every rational function and every convergent power series with coefficients in  $A$  is holomorphic. The theorems of Cauchy and Morera and their consequences hold under suitable conditions. *MacDuffee* (Madison).

**Martinelli, Enzo: Sulle funzioni poligene di due variabili complesse.** Mem. Accad. Ital. **8**, 65—125 (1937).

Ce travail est dédié à l'étude des fonctions polygènes de deux variables complexes,  $x = x_1 + ix_2$  et  $y = y_1 + iy_2$ , c'est-à-dire des fonctions  $f(x, y) = \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) + i\psi(x_1, x_2, y_1, y_2)$  pour lesquelles on ne fait aucune hypothèse de monogénéité: on suppose seulement, d'abord, que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  aient les dérivées du 1<sup>er</sup> ordre continues, dans le voisinage d'un point  $O$  de l'espace  $S_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$  des deux variables



complexes  $x$  et  $y$ . La recherche a surtout caractère géométrique, et dans plusieurs endroits se rattache intimement à d'autres de F. Severi et du réf., concernant les fonctions analytiques de deux variables complexes [cfr. F. Severi et B. Segre, Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7 (1931); ce Zbl. 3, 213]. — Pour chaque direction  $t$  sortant de  $O$ , la fonction  $f(x, y)$  admet deux dérivées directionnelles  $f'_{x,t}$ ,  $f'_{y,t}$ , resp. par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ ; lorsque  $t$  varie, chacune de ces-ci prends toutes les valeurs complexes, et les directions  $t$  sortant de  $O$  qui sont de niveau constant pour  $f_{x,t}$  ou pour  $f_{y,t}$  remplissent des plans: on obtient ainsi dans l'étoile de centre  $O$  deux systèmes algébriques  $\infty^2$  de plans, nommés resp. plans pseudo-caractéristiques du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> système. Ces plans dépendent en général du point  $O$  et de la fonction  $f(x, y)$ , mais — au point de vue local — ils ont la plus étroite analogie avec les plans caractéristiques ordinaires; précisément, si l'on considère une fonction  $F(x, y)$  arbitraire monogène dans le voisinage d'un point  $O'$ , il existe entre les deux étoiles de centres  $O, O'$  une homographie associant des directions sortant de ces point pour lesquelles les dérivées directionnelles de  $f$  et  $F$  par rapport à  $x$  (ou par rapport à  $y$ ) résultent égales: cette homographie transforme les plans pseudo-caractéristiques du 1<sup>er</sup> (ou du 2<sup>e</sup>) système de  $f$  sortant de  $O$ , dans les plans caractéristiques qui passent par  $O'$ . — En supposant que  $\varphi$  et  $\psi$  soient des fonctions analytiques de leurs 4 arguments, l'A. définit ensuite les surfaces polygènes-caractéristiques du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>e</sup> système (relatives à  $f$ ), avec la propriété d'admettre en chaque point comme plan tangent un plan pseudo-caractéristique resp. du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>e</sup> système; il détermine les surfaces qui en même temps appartiennent aux deux systèmes, et les conditions pour que parmi celles-ci il y ait des surfaces caractéristiques, ce que lui permet de répondre à une question sur les fonctions polygènes posée jadis par E. Kasner [Bull. Amer. Math. Soc. 35, 444 (1929)]. Un morceau de courbe analytique de  $S_4$  appartient à une et une seule surface polygène-caractéristique p. ex. du 1<sup>er</sup> système, avec des exceptions qu'ici sont bien précisées, portant à l'introduction de certaines lignes (imaginaires) dites polygènes-bicaractéristiques. — En supposant toujours  $\varphi$  et  $\psi$  analytiques, et en s'appuyant sur l'extension d'un théorème classique de T. Levi-Civita, l'A. remarque enfin que la fonction  $f$  peut être considérée comme la trace sur un  $S_4$  convenable (non semi-caractéristique) d'une — et d'une seule — fonction  $F$  analytique de 4 arguments; ceci lui permet d'étendre à  $f(x, y)$  le théorème de Cauchy-Poincaré, moyennant l'application du même théorème à la fonction  $F$  en relation à une  $V_4$  variable, opportunément choisie, se réduisant à la limite sur l' $S_4$  susdit. On parvient ainsi à une formule exprimant  $\iint f(x, y) dx dy$ , étendue à une surface fermée quelconque du champ de régularité de  $f(x, y)$ , comme la somme de deux intégrales triples (se réduisant à zéro pour les fonctions  $f$  monogènes); de cette relation l'A. en déduit une autre — analogue à la formule intégrale de Cauchy — fournissant les valeurs de  $f(x, y)$  à l'intérieur d'un bicylindre, lorsqu'on connaît certaines données relatives à  $f(x, y)$  sur le contour.

Beniamino Segre (Bologna).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

● Possel, René de: Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion. (Actualités scient. et industr. Nr. 436. Conférences du centre univ. méditerranéen de Nice. Publiés par Paul Valéry. I.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 40 pag. Frs. 10.—

Es wird zwischen den reinen Kombinationsspielen und den Gesellschaftsspielen unterschieden, welche sowohl vom Zufall als auch vom Spielsystem der Spieler abhängen. Es wird gezeigt, daß der Spielausgang bei ersteren „bei optimalem Spiel“ theoretisch von vornherein bestimmt ist. Für letztere wird die günstigste Spielstrategie geschildert in Anschluß an von Neumann, Über die Gesellschaftsspiele, Math. Ann. 100 (1927). Der Rahmen der Vorlesungskurse erzwingt in der Darstellung äußerste Zurückhaltung in mathematischer Hinsicht.

W. Feller (Stockholm).



**Martinotti, Pietro:** *Intorno alla regola probabilistica di Bayes.* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 67—76 (1936).

Betrachtungen über das Bayessche Theorem, das in einer etwas verallgemeinerten Form ausgesprochen wird. Anwendungen und Beispiele. *Bruno de Finetti* (Trieste).

● **Darmois, Georges:** *L'emploi des observations statistiques. Méthodes d'estimation.* (Actualités scient. et industr. Nr. 356. Statistique math. Exposés publiés par Georges Darmois. I.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 33 pag. Frs. 10.—

Eine konzise Darstellung der von R. A. Fisher 1921 begründeten (vgl. auch dies. Zbl. 11, 32), von Doob (dies. Zbl. 10, 173) und Verf. (dies. Zbl. 11, 218) mathematisch besser fundierten und entwickelten Theorie der „sufficient estimation“. Das Problem wird rein mathematisch formuliert, Methoden und Resultate werden klar geschildert. Für die Beweise wird zum größten Teil auf die Originalarbeiten verwiesen, ohne jedoch auf die Strenge der Darstellung zu verzichten. Inhalt: Notions générales. — Les différentes estimations. — Estimations à écart-type minimum. — Précision intrinsèque et quantité d'information. *W. Feller* (Stockholm).

**McIntyre, Francis:** *Automatic checks in correlation analysis.* J. Amer. Statist. Assoc. 32, 119—123 (1937).

**Castellano, V.:** *Sugli indici relativi di variabilità e sulla concentrazione dei caratteri con segno.* Metron 13, 31—49 (1937).

### **Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:**

**Boehm, Carl:** *Sicherheitsreserve und Rückversicherung in der Lebensversicherung.* Bl. Versich.-Math. 4, 41—69 (1937).

**Löer, Klemens:** *Gruppenversicherung gegen Durchschnittsprämie.* Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch. 3, 15—44 (1937).

Es wird die Frage der versicherungstechnischen Bedenken gegen die Gruppenversicherung gegen Durchschnittsprämie untersucht und gezeigt, daß die technische Durchschnittsprämie anwendbar ist und daß auch die technische Handhabung einfach ist. Zuerst werden für geschlossene Gruppen, bei denen keine neuen Mitglieder der Gruppe beitreten können, drei Arten von Durchschnittsprämien (Risiko-, gewöhnliche, technische Durchschnittsprämie), dann die Reserven und Rückkaufswerte im Falle des Gesamtrücktritts der Gruppe und des Einzelrücktritts behandelt. Darauf werden kurz diese Probleme im Verhältnis zum Neuzugang bei offenen Gruppen betrachtet. Der Verf. analysiert die betreffenden Abhandlungen von Küttner, Riebesell, Sachs, Gramberg, Knörlein, Klinger und Rey, Strassmann, Becker, Lorenz, Steinbuch, die im Literaturverzeichnis angeführt werden. Im letzten Teile wird vom Verf. zu den Richtlinien des Reichsaufsichtsamtes für den Abschluß von Gruppenversicherungen Stellung genommen. *Janko* (Praha).

● **Kostitzin, V. A.:** *Biologie mathématique. Préface de Vito Volterra.* (Collect. Armand Colin, Sect. Biol.) Paris: Armand Colin 1937. 223 pag. et 16 fig. Frs. 13.—

D'une manière aussi cohérente que possible, l'auteur résume, avec commentaires et compléments, l'essentiel des travaux mathématiques sur des sujets biologiques variés, en grande partie publiés ces dernières années par Lotka, Volterra puis par lui-même. L'exposé n'exige que des connaissances élémentaires d'Analyse et double, si possible, chaque développement théorique par des résultats expérimentaux correspondants (dus à Lotka, Gause, Régnier, Pérez, Tessier etc.). — La statistique, par son étude de moyennes, de corrélations, aide le bon sens expérimental à traduire mathématiquement bien des problèmes biologiques par des systèmes différentiels (ou intégré-différentiels) presque tous du type:

$$\frac{dy_k}{dt} = \alpha_k + \sum_{s=1}^n \varepsilon_{ks} y_s - y_k \sum_{s=1}^n h_{ks} y_s \quad (k = 1, \dots, n),$$

où les  $y$  fonctions du temps  $t$  caractérisent l'état du système étudié. Si l'on ne peut intégrer numériquement, on cherchera des propriétés des intégrales (stabilité, périodicité, allure asymptotique etc.) contrôlables aussi par l'expérience. Cette analogie dans la traduction mathématique de questions disparates, dans les discussions et résultats, constitue l'unité de cet exposé synthétique.



tique. — Contenu des chapitres: I. Introduction méthodologique. II. Notions utiles sur la statistique et les équations différentielles. III. Circulation du carbone, oxygène, azote (cf. Kostitzin, *Actualités sc. et ind.*, n° 271). IV. Croissance des populations fermées et loi logistique de Verhülst. V., VI., VII. Influences diverses sur les populations: espace, nourriture, intoxication par produits métaboliques, immigration, hétérogénéité par l'âge etc. VIII., IX. Associations biologiques d'espèces qui se disputent la même nourriture ou s'entredévorent. Equations de Lotka et Volterra. Lois biologiques de Volterra (sans effets à retardement ni mention des principes de conservation d'énergie démographique et de moindre action vitale (cf. ce Zbl. 15, 34). X. Symbiose et parasitisme, à partir des travaux de Thompson et Lotka (cf. ce Zbl. 9, 28). XI., XII., XIII. Croissance de l'organisme, des tissus, de l'embryon, des organes. Divers calculs sur des lois empiriques. XIV. Remarques sans calculs sur la forme des êtres vivants. XI. Sélection. Disparition de races. *Brelot (Alger).*

**Volterra, Vito: Principes de biologie mathématique.** *Acta biotheor.* (Leiden) 3, 1—36 (1937).

L'auteur reprend son étude des associations biologiques de  $n$  espèces (de  $N_1, N_2, \dots, N_n$  individus) s'entredévorent, dans l'hypothèse des „équivalents“ qui fournit le système différentiel:

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left( \epsilon_r \beta_r + \sum_{s=1}^n a_{sr} N_s \right) N_r. \quad (a_{sr} = -a_{rs})$$

Il résume (en perfectionnant un peu) le chap II de son ouvrage (cf. ce Zbl. 2, 42) et ajoute, par des équations canoniques (analogues à celles de Hamilton) et un principe de moindre action vitale, le développement d'une dynamique biologique, publié par fragments dans des notes récentes (cf. ce Zbl. 14, 170 et 259; 15, 34). *M. Brelot (Alger).*

## Numerische und graphische Methoden.

● **Glagoleff, N. A.: Theoretische Grundlagen der Nomographie.** 2. Aufl. Moskau-Leningrad: Vereinigter wissenschaftlich-technischer Verlag NKTP SSSR. 1936. 252 S. u. 182 Fig. [Russisch].

Das Buch behandelt die Nomographie vom mathematischen Standpunkt aus. Es wendet sich an Ingenieure und Studenten. Daraus ergeben sich Stoffauswahl und Darstellungsart. Zur Erzielung leichter Lesbarkeit werden über Differential- und Integralrechnung hinausgehende mathematische Voraussetzungen vermieden. Überall eingestreute Beispiele in Form von Aufgaben mit Lösungen und Abbildungen erläutern die theoretischen Darlegungen. Nach einer historischen Einleitung und einem Literaturverzeichnis von 74 Nummern werden in sieben Kapiteln behandelt: Funktionsleitern und -netze, kartesische Netztafeln, Fluchtlinientafeln für Gleichungen mit drei Veränderlichen, determinantenfreie Verfahren zur Herstellung von Fluchtlinientafeln, Nomogramme für Gleichungen mit mehr Veränderlichen, Abbildung von Nomogrammen, Sonderformen von Nomogrammen. Die Verstreckung von Netztafeln durch Achsenumbefizierung wird durchgerechnet (Sätze von St. Robert und Soreau). Die allgemeinere Fragestellung von Gronwall wird nur erwähnt. Das umfangreiche Kap. III lehnt sich an Luckey, *Z. angew. Math. Mech.* 4, 61 ff. (1924), an: Einteilung der Gleichungen nach ihrer „nomographischen Ordnung“, Herbeiführung kanonischer Formen. Unter determinantenfreien Verfahren werden die mit Linienkoordinaten, mit Polarenverwandtschaften oder mit Elementargeometrie arbeitenden verstanden. Das Schlußkapitel enthält Stechzirkel-, Sechsecknomogramme und Tafeln mit nichtgerader Ablesevorrichtung, ein Anhang die Auflösung algebraischer Gleichungen mittels Logarithmenpapiers. Ein besonderes Verzeichnis stellt die mit Bildern behandelten Beispiele zusammen. Drei dieser Bilder, die sich am Ende des Buches befinden sollen, fehlen im Exemplar des Ref. — Das Buch stellt einen gut lesbaren, übersichtlichen und für den anfangs bezeichneten Leserkreis stofflich sicher mehr als ausreichenden Bericht über die mathematisch-nomographische Literatur dar. Die gewählten, fast durchweg rein mathematischen Beispiele lassen es für den Geschmack des Praktikers allerdings etwas trocken erscheinen.

*Theodor Zech (Darmstadt).*

**Frank, M.: Ein Verfahren zur angenäherten Transformation einer Netztafel in eine Leitertafel.** *Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math.* Nr 10, 9—16 u. deutsch. Zusammenfassung 16 (1936) [Russisch].

Verschiebt man die Netzlinien  $x = \text{konst.}$  und  $y = \text{konst.}$  eines rechtwinkligen  $x, y$ -Systems in passender Weise parallel, so kann man zwei vorgegebene Kurven in Gerade verwandeln, „strecken“. Zeichnerische Verfahren zur Auffindung der im besonderen Fall erforderlichen Netzlinienverschiebung (Umbezeichnung der Achsen) sind

bekannt und werden vom Verf. mit unwesentlichen Änderungen wiedergegeben. Die begleitende Rechnung des Verf. ist fehlerhaft, da in seinen Gleichungen (4)  $\frac{dy}{dy_1}$  in zwei Bedeutungen vorkommt; schon das Beispiel des sicher verstreckbaren Kurvenpaares  $F_1 \equiv y - x = 0$ ,  $F_2 \equiv y - x^2 = 0$  zeigt übrigens, daß sein Kriterium (5) für Verstreckbarkeit falsch ist. — Läßt man außer Verschiebung auch Drehung jeder einzelnen Netzlinie zu, so kann man drei Kurven gleichzeitig verstrecken. Es wird ein etwas willkürlich anmutendes zeichnerisches Verfahren hierfür angegeben und auf ein Beispiel angewandt. Die Bedeutung für näherungsweise Umwandlung von Netz- in Leitertafeln liegt auf der Hand.

*Theodor Zech (Darmstadt).*

**Ott, L. A.: Systematische Entwicklung der Planimeter und Integrimeter aus der einfachsten Grundform. Meßtechn. 13, 41—48 (1937).**

Der Aufsatz bringt die Theorie der Integratoren, das ist der Integrationsgeräte, mit Meßrolle in einheitlicher Darstellung. Das Radialintegrimeter (früher Radialplanimeter genannt; Planimeter liefern erst nach voller Umfahrung, Integrimeter auch in jeder Zwischenstellung einen Integralwert) wird als Stammform aller Integratoren angesehen; seine Theorie ist besonders durchsichtig. Verdrehung der Meßrolle gegen den Fahrstab bedeutet Maßstabsänderung des Ergebnisses. Durch passende Krümmung des Fahrstabes macht man die momentane Maßstabsänderung vom Polabstand  $r$  in willkürlicher Weise abhängig. Z. B. erhält man bei kreisbogenförmigem Fahrstab ein Quadrat-Radialplanimeter, also einen Integrator für  $\int r^2 d\varphi$ ; entsprechend andere Potenz-Radialplanimeter. Beim eben beschriebenen Qu.-Rpl. läßt sich die Führung mittels Kreisbogen-Fahrstabs durch eine Gelenkführung ersetzen: Polarplanimeter. Von da führen wiederum einfache Abänderungen zum Ring- und Linearplanimeter, zum Linearintegrimeter und zu Potenz-Linearplanimetern. Letztere arbeiten allerdings ungenau. Ihnen werden die günstiger wirkenden Potenzplanimeter mit Nockensteuerung des Verf. und die auf Winkelvervielfachung beruhenden Formen gegenübergestellt. Planimeter, bei welchen die Meßrolle auf bewegter Unterlage gleitet, können auch gewisse Integrale von Funktionen zweier Veränderlicher liefern (Zentrifugalmomente).

*Theodor Zech (Darmstadt).*

**Steuermann, E.: A new method for the solution of certain algebraic equations applied in mathematical physics and technics. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. Nr 4, 9—18 u. engl. Zusammenfassung 18—19 (1936) [Ukrainisch].**

Fortsetzung einer in dies. Zbl. 12, 115 besprochenen Arbeit. Es wurde damals vom Ref. der Einwand erhoben, daß das vom Verf. zur Aufstellung der Säkulargleichung als besonders praktisch empfohlene Verfahren der gewöhnlichen (Gaußschen) sukzessiven Elimination aus Paaren von Gleichungen im allgemeinen auf eine Eliminate von höherem Grade als die Säkulargleichung führe, was den praktischen Wert der Methode beeinträchtigen könne. Verf. zeigt jetzt, wie durch Einschaltung einiger Zwischeneliminationen die Methode so modifiziert werden kann, daß als Eliminate ohne weiteres die Säkulargleichung herauskommt. Bei der praktischen Bewertung der Methode wird man allerdings auch die für die Zwischeneliminationen nötige Rechenarbeit in Betracht zu ziehen haben. — An zweiter Stelle behandelt Verf. eine von A. Krylov (dies. Zbl. 2, 291) vorgeschlagene Methode zur Aufstellung der Säkulargleichung, wobei als Eliminate eine Determinante gewonnen wird, die die Unbekannte nur in einer Kolonne enthält und in ihr vom richtigen Grade ist. Krylov hatte dieses Ergebnis auf einem Umweg gefunden. Verf. zeigt, daß es durch ein höchst einfaches Eliminationsverfahren erhalten werden kann. (Siehe übrigens Arbeiten von Lusin [dies. Zbl. 4, 49; 6, 122 u. 244], Chlodowskij [dies. Zbl. 8, 290] und Gantmacher [Arb. d. 2. math. Bundestag. 2 (1936)] bezüglich des möglichen identischen Verschwindens der Krylovschen Eliminate.) — An dritter Stelle wird eine Abwandlung des eben genannten Eliminationsverfahrens gebraucht, um, im Hinblick auf Anwendung des



Graeffschen Verfahrens, die Summen der  $2^p$ -ten Potenzen ( $p = 1, 2, \dots$ ) der Wurzeln der Säkulargleichung zu berechnen, ohne die Gleichung selbst explizit aufzustellen.

Blumenthal (Aachen).

**Sibagaki, Wasao:** On the numerical integration of ordinary differential equations of the first and the second orders. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 659—705 (1936).

Die zur numerischen Integration von  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  ausgebildeten Verfahren [sukzessive Berechnung von Näherungswerten  $\xi(t_n)$  für die Werte  $x(t_n)$  der exakten Lösungsfunktion  $x(t)$  an den Stellen  $t_n = t_0 + n \cdot h$ ] der Extrapolation, der Interpolation und eines von H. Levy und E. A. Baggott angegebenen Verfahrens (das im wesentlichen auch ein Interpolationsverfahren ist) werden kurz zusammengestellt und für sie Fehlerabschätzungen durchgeführt. Von den durch R. v. Mises [Z. angew. Math. Mech. 10, 81 (1930)] und G. Schulz [Z. angew. Math. Mech. 12, 44 (1932); dies. Zbl. 3, 394] aufgestellten Abschätzungen unterscheiden sich die Abschätzungen des Verf. dem Gedankengang nach nicht, sondern nur dadurch, daß Verf. Formeln für  $\xi(t_n) - \xi(t_{n-2})$  zugrunde legt, während v. Mises und G. Schulz von Formeln für  $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$  ausgehen. Auch für Systeme von  $m$  linearen Differentialgleichungen  $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_m)$ ,  $x_i(t_0) = x_{i,0}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) werden Fehlerabschätzungen durchgeführt. Als Beispiel wird

$$\frac{dx}{dt} = x + t^2, \quad x(0) = 1 \quad \text{im Gebiete} \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \text{mit } h = 0,1$$

behandelt.

Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = \dot{x}_0$$

werden für das Extrapolationsverfahren [G. Schulz, Z. angew. Math. Mech. 14, 224 (1934); dies. Zbl. 9, 317] und für ein vom Verf. neu aufgestelltes Interpolationsverfahren Fehlerabschätzungen durchgeführt und auch die Fehler untersucht, die bei der iterativen Berechnung der Anfangswerte entstehen. Die Betrachtung wird mit Benutzung von Matrizen auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt. Zur Erläuterung dient das Beispiel

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + t^2 + 2t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1$$

(die Lösungsfunktion ist identisch mit der des ersten Beispiels) im Gebiet  $0 \leq t \leq 2$  mit derselben Weite  $h = 0,1$ .

Collatz (Karlsruhe).

## Geometrie.

**Abason, Ernest:** Sur une propriété du triangle équilatéral. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 7, 6—8 (1937).

**Abason, Ernest:** Un théorème de géométrie. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 7, 8—13 (1937).

**Botea, N. G.:** Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 7, 13—14 (1937).

**Thébault, V.:** Sur les sphères de S. Roberts. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1 57, 16—22 (1937).

**Wunderlich, Walter:** Die isoptischen Kurven der Zykloiden. Z. angew. Math. Mech. 17, 56 (1937).

Wenn ein fester Winkel mit seinen Schenkeln an je einer Zykloide gleitet, wo eine aus der anderen durch eine Drehstreckung aus dem Mittelpunkt entstanden ist,

so beschreibt sein Scheitel eine Trochoide, und diese Bewegung ist durch das Abrollen einer Ellipse auf einer ähnlichen Trochoide zu erklären. *Eckhart (Wien).*

**Hohenberg, Fritz:** Zirkulare Kurven in der nichteuklidischen Geometrie. *Mh. Math. Phys.* **45**, 133—168 (1937).

Als zirkulare Kurven der nichteuklidischen Geometrie sind die ebenen Kurven  $n$ -ter Ordnung zu definieren, die den Maßkegelschnitt ihrer Ebene in  $n$  Punkten berühren. Die  $n$  Punkte können auf alle mögliche Weise zusammenfallen oder auch singuläre Punkte der Kurve sein. Die Arbeit behandelt zuerst die nichteuklidischen Kreise, Kreisbündel und Kreisbüschel sowie die nichteuklidischen zirkularen Kurven dritter und vierter Ordnung. Als Anwendungen folgen Untersuchungen über die isoptischen Linien der Kegelschnitte, die Isogonalkurven zweier Kegelschnitte und über die Fußpunktkurve des Kegelschnittes im Rahmen der nichteuklidischen Metrik. Hierbei und bei der Behandlung zirkularer Kurven höherer Ordnung zeigt die anschauliche Darstellung den viel größeren geometrischen Formenreichtum im Vergleich mit der Theorie zirkularer Kurven der euklidischen Geometrie. *Haenzel (Karlsruhe).*

**Takasu, Tsurusaburo:** A model of the topologically finished hyperbolic plane. Reprinted from: *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. Ser. 2 pag. (1936).

**Garnier, René:** Sur deux théorèmes classiques de géométrie conforme. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 542—544 (1937).

Die Gruppe der konformen Transformationen des Raumes und diejenige derjenigen Berührungstransformationen, die die Krümmungsstreifen erhalten, hängen nach Lie eng miteinander zusammen. Letztere ist eine Erweiterung der ersteren mittels Hinzunahme der Dilatationen. In dieser Arbeit wird nun mit Hilfe von pentaspärischer Koordinaten eine einfache Basis für beide Gruppen gewonnen. *Burau (Hamburg).*

### Analytische und algebraische Geometrie:

**Gambier, Bertrand:** Coniques (quadrriques) harmoniquement circonscrites à une autre. Configurations projectives et anallagmatiques. *Bull. Soc. Math. France* **64**, 174—196 (1936).

Die Abhandlung geht von der Konfiguration zweier Kegelschnitte aus, von denen der eine  $\infty^1$  Polardreiecken des anderen umbeschrieben ist. Nach Aufstellung der für diese Beziehung notwendigen und hinreichenden analytischen Bedingung wird das Problem auf beliebig viele Dimensionen erweitert und angewendet. *Haenzel.*

**Dantoni, Giovanni:** Sul diverso comportamento di una omografia rispetto alle quadriche che essa trasforma in sè. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **6**, 11—27 (1937).

In a space of  $n$  dimensions, a collineation  $x_i = \sigma \sum_{k=0}^n b_{ik} x'_k$  leaving invariant a quadric  $F = 0$  is said to be of the first or second species with respect to  $F = 0$  if a value for which the quadratic form  $F$  is absolutely invariant is such that  $|\sigma b_{ik}| = +1$  or  $-1$ . For  $n$  odd, a collineation may leave invariant two non-singular quadrics and be of different species with respect to them. In Part I the author finds necessary and sufficient conditions on the collineation that this may take place. In a space of  $2^m - 1$  dimensions, the collineations of this type are cyclic of order  $2^m$  with  $2^m$  fixed points. In Part II he obtains necessary and sufficient conditions that the fixed non-singular quadrics of a collineation be representable in a finite number of linear systems, and he determines this number. The two problems are closely related. *MacDuffee.*

**Barrau, J. A.:** Self-projective point-casts in space. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **40**, 150—155 (1937).

Vom Verf. war allgemein im  $R_n$  eine endliche Gruppe  $G_{n!}$  angegeben worden, die die Punkte nach einer Involution der Ordnung  $n!$  anordnet (s. J. A. Barrau, dies Zbl. **15**, 119). In dieser Ergänzungsarbeit werden nun für den  $R_3$  wie oben für die Ebene in besonders symmetrischer Bezeichnungsweise die 15 Quadriken von Doppelpunkten,



die Geraden und Kegelschnitte von vierfachen Punkten, Kubiken von 6fachen Punkten, die 12- und 24fachen Punkte der 720-Involution angeben. *Burau* (Hamburg).

**Chisini, Oscar:** *Sulla molteplicità di intersezione di due curve algebriche in un loro punto comune.* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 261—270 (1936).

Bekanntlich kann der Bézonsche Satz für ebene Kurven mit Hilfe der Sylvesterschen Resultante elementar bewiesen werden; dabei findet man gleichzeitig die „Zeuthensche Regel“ zur Bestimmung der Multiplizität eines Schnittpunktes: Wird dieser als Anfangspunkt der Koordinaten gewählt, so gehören zu einem kleinen Abszissenwert  $x$  Ordinatenwerte  $y_p$  auf der einen und  $Y_q$  auf der anderen Kurve, die mit  $x$  gegen Null streben; die Multiplizität ist dann die Summe der Ordnungen der Differenzen  $y_p - Y_q$  als Funktionen von  $x$  für  $x \rightarrow 0$ . Es wird nun ein elementarer Beweis dafür gegeben, daß diese Multiplizitätsdefinition unabhängig von der Achsenwahl und projektiv invariant ist. *van der Waerden* (Leipzig).

**Wylie jr., C. R.:** *Curves belonging to pencils of linear line complexes in  $S_4$ .* Bull. Amer. Math. Soc. 43, 90—94 (1937).

Dans ce travail l'A. étudie les courbes de  $S_4$  dont les tangentes appartiennent 1° à un complexe linéaire de droites, ou 2° à un faisceau de complexes linéaires de droites; il exclut explicitement qu'un des complexes envisagés puisse être spécial, ce qui entraînerait que chacune des courbes en question devrait appartenir à un espace de dimension  $\leq 3$ . L'A. donne les représentations paramétriques des courbes susdites (référées à des coordonnées projectives convenables), faisant intervenir respectivement 2 ou 1 fonction arbitraire d'un seul argument, et il démontre que celles du 1<sup>er</sup> type peuvent être rapportées biunivoquement aux courbes de  $S_5$  dont les tangentes rencontrent une surface fixe du 3<sup>e</sup> ordre, tandis que celles du 2<sup>e</sup> type peuvent être rapportées biunivoquement aux courbes de  $S_4$  dont les tangentes s'appuyent à une courbe fixe du 3<sup>e</sup> ordre. Ces résultats sont obtenus en se servant de la représentation classique des droites de  $S_4$  avec la  $V_8^5$  grassmannienne de  $S_9$ ; incidemment, il résulte que les plans osculateurs à une courbe quelconque du 2<sup>e</sup> type rencontrent une conique fixe (mais non réciproquement). Il y a enfin quelques remarques — liées à un travail antérieur du réf. [B. Segre, Atti Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. 2, 578 (1928)] — sur les courbes de  $S_4$  dont les tangentes appartiennent à trois ou plus complexes linéaires indépendants. *Beniamino Segre* (Bologna).

**Villa, Mario:** *Sulle corrispondenze a valenza positiva o nulla.* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 479—485 (1936).

Dans ce travail l'A. donne pour les correspondances à valence  $\varrho \geq 0$ , entre deux courbes algébriques  $C$  et  $\bar{C}$ , la construction géométrique suivante. Considérons d'une façon quelconque une  $g_n^\delta$  sur  $C$  et une  $\bar{g}_m^\delta$  sur  $\bar{C}$ ; ces deux séries linéaires ayant même dimension  $\delta$ , on peut définir une réciprocity  $R$  non dégénère entre les groupes  $G_n$  de l'une et les groupes  $\bar{G}_m$  de l'autre. Un point  $P$  générique de  $C$  détermine une  $g_n^{\delta-1}$ , constituée par les groupes  $G_n$  qui le contiennent, et cette  $g_n^{\delta-1}$  et transformée par  $R$  dans un groupe  $\bar{G}_m$  déterminé, contenant  $P$  un certain nombre  $\varrho \geq 0$  de fois (on peut avoir  $\varrho > 0$  seulement si  $C$  et  $\bar{C}$  coïncident); on obtient alors entre  $C$  et  $\bar{C}$  une correspondance à valence  $\varrho$ , en associant à  $P$  le groupe  $\bar{G}_m - \varrho P$ . Réciproquement, chaque correspondance à valence  $\varrho \geq 0$  entre deux courbes peut être ainsi définie, et d'une seule manière; les séries  $g_n^\delta$ ,  $\bar{g}_m^\delta$  et la réciprocity  $R$  résultent covariantes à la correspondance vis-à-vis des transformations birationnelles de  $C$ ,  $\bar{C}$ ; tel est en particulier le nombre  $\delta$ , que l'A. nomme le genre dimensionnel de la correspondance. (Tous ces résultats sont déjà implicitement contenus dans une recherche classique de A. Hurwitz, cfr. p. ex. Mathematische Werke 1, 161, § 6 [Basel: Birkhäuser 1932], où le nombre  $\delta$  est nommé la dimension de la correspondance.) — Le travail contient en outre quelques remarques sur le cas où  $C$  et  $\bar{C}$  sont rationnelles ou coïncident, avec égard particulier aux correspondances symétriques. *Beniamino Segre* (Bologna).

**Severi, Francesco:** *Equivalenza d'una curva come gruppo virtuale parziale d'una serie d'equivalenza sopra una superficie.* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 77—84 (1936).

Auf einer algebraischen Fläche  $F$  möge eine Äquivalenzschar von Punktgruppen von einer Schar von  $M_{r-2}$  des Raumes  $S_r$  ausgeschnitten werden, welche zu einer  $M_{r-2}$  zumindest alle projektiv-äquivalenten  $M_{r-2}$  enthält. Ein besonderes Element  $M_{r-2}$  der Schar möge aus  $F$  eine Kurve  $D$  (und noch einige Punkte) ausschneiden. Nähert sich  $M$  dem besonderen  $M'$ , so nähern sich einige Punkte der ausgeschnittenen Punktgruppe auf  $F$  der Kurve  $D$ , und zwar erhält man in der Grenze eine Punktgruppe  $X$  von  $D$ . Die Lage der Punktgruppe  $X$  hängt zwar von der Art des Grenzübergangs ab, aber ihre Divisorenklasse auf  $D$  ist eindeutig bestimmt:  $X$  ist nämlich äquivalent der Summe einer hyperebenen Schnittgruppe von  $D$  und der Gruppe  $\Sigma$  der Berührungspunkte der Hyperebenen, welche durch einen allgemeinen Punkt  $O$  des Raumes gehen und die Mannigfaltigkeiten  $F, M'$  beide in demselben Punkt von  $D$  berühren. Ist  $L$  die virtuelle Schnittgruppe von  $D$  mit der harmonischen Schar von  $M'_{r-2}$ ,  $G$  die von  $D$  mit einer Hyperebene und  $(D, D)_F$  die von  $D$  mit sich selbst auf  $F$ , so gilt die Äquivalenz auf  $D$ :

$$X \equiv L + (r+1)G - (D, D)_F. \quad \text{van der Waerden.}$$

**Hodge, W. V. D.:** *Note on the theory of the base for curves on an algebraic surface.* J. London Math. Soc. 12, 58—63 (1937).

In a preceding paper (this Zbl. 8, 29) the author has proved that the signature of the intersection matrix of the  $R_2$  two-cycles of an algebraic surface  $F$  contains  $2p_g + 1$  positive terms, where  $p_g$  is the geometric genus of  $F$ . In the present paper, a closer examination of the harmonic double integrals attached to the various algebraic and non-algebraic cycles of  $F$  leads to the result that of these  $2p_g + 1$  positive terms only one is contributed by the algebraic cycles, while the remaining  $2p_g$  terms arise from the non-algebraic cycles. As an illustration of what may happen in an extension to algebraic varieties, the following theorem is stated for any 4-dimensional variety  $V$ : let  $\Gamma_4^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, \rho_1 + \rho_2$ ) be a base for algebraic 4-cycles on  $V$ , where  $\Gamma_4^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \rho_1$ ) constitute a base for such cycles on a general section on  $V$ , and where, moreover,  $(\Gamma_4^{(i)} \cdot \Gamma_4^{(j)}) = 0$ ,  $i \leq \rho_1$ ,  $j > \rho_1$ ; there is then one positive term in the signature of the intersection matrix of the cycles  $\Gamma_4^{(i)}$  and  $\rho_2$  positive terms in the intersection matrix of the cycles  $\Gamma_4^{(j)}$  ( $j = \rho_1 + 1, \dots, \rho_2$ ). *O. Zariski* (Baltimore).

**Archbold, J. W.:** *Note on a family of regular surfaces.* J. London Math. Soc. 12, 28—29 (1937).

The virtual dimension of the linear system of surfaces  $F^{2k}$  of order  $2k$  in  $S_3$ , having assigned  $k$ -fold points  $O_1, \dots, O_7$  and one assigned  $(k-1)$ -fold point  $O_8$ , equals  $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ . It is proved that this is also the effective dimension of the system; that if  $O_1, \dots, O_8$  are in general position, the  $F^{2k}$  have in common another simple point  $O_9^{(k)}$ , whose position depends on  $k$ ; that if  $O_1, \dots, O_8$  are base points of a net of quadrics, then  $O_8$  is effectively a  $k$ -fold base point of the system.  $F^{2k}$  is regular,  $p_g = p_a = \frac{1}{2}k(k-1)$ , linear genus  $\bar{p}^{(1)} = 3k^2 - 11k + 10$ . *O. Zariski* (Baltimore).

**Castelnuovo, Emma:** *Di una classe di superficie razionali che ammettono  $\infty^2$  trasformazioni proiettive in sè.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 342—346 (1936).

The group  $G$ ,  $\infty^2$  of collineations, which leave invariant a space cubic  $C_3$  and a point  $O$  on  $C_3$ , gives rise to a pencil of sextic surfaces  $F_6$  which are invariant under  $G$ .  $F_6$  has singularities, namely  $C_3$  as a cuspidal curve, the tangent line of  $C$  at  $O$  as triple line and a uniplanar fourfold point at  $O$ . The surface  $F_6$  can be mapped upon a plane by a web of plane cubics on 3 collinear points, and the web is transformed into itself by a two-parameter group of homologies having a fixed axis. Some properties of this mapping are studied, especially those which refer to the maps of the singular loci of  $F^6$ . *O. Zariski* (Baltimore).



**Bompiani, E., e E. Bortolotti:** *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese.* Math. Z. 42, 411—429 (1937).

Die Arbeit enthält einige Kennzeichnungen der Veroneseschen Fläche unter Benutzung und Erweiterung von Begriffsbildungen der projektiven Differentialgeometrie. Von Segre ist bereits die Veronesesche Fläche als die einzige gekennzeichnet worden bei der die Prinzipalrichtungen in jedem Punkt unbestimmt werden. Hieran schließt sich im I. Abschnitt eine weitere Kennzeichnung derselben an als einziger Flächen die nur  $\infty^2$  Bitangential- $R_4$  besitzen (statt  $\infty^3$  im allgemeinen). Dann wird auf die Klasse von Flächen hingewiesen, die mindestens eine Kurvenschar besitzen mit der Eigenschaft, daß der Bitangential- $R_4$  für alle Punkte einer gegebenen Kurve der Schar konstant ist. Es wird nachgewiesen, daß solche Flächen entweder die Veronesesche Fläche sind oder daß die Kurven der Schar den  $R_3$  einer Torse angehören. Es wird das Problem als offen hingestellt, ob die Fläche von Bol ( $T_{64}$ , dies. Zbl. 14, 230) dadurch gekennzeichnet ist, 5 solcher Kurvenscharen zu besitzen. Teil II, der von Bortolotti stammt, bringt eine weitere Kennzeichnung der Veronesefläche, die eine Kombination zwischen der soeben erhaltenen und einer früheren von Bompiani darstellt. Im Teil III führt schließlich Bompiani allgemein einige Begriffsbildungen für Flächen im  $R_5$  ein, z. B. in jedem Punkt zueinander konjugierte Flächen- und Linienelemente. Ferner werden zu jeder Prinzipalrichtung in einem Flächenpunkt 5 invariant verbundene Ebenenelemente eingeführt, aus deren teilweisem Zusammenfallen für 3 als verschieden vorausgesetzte Prinzipalrichtungen sich eine Kennzeichnung der Veronesefläche ergibt. Die Ergebnisse werden rechnerisch in differentieller Schreibweise ermittelt.

Bureau (Hamburg).

**Babbage, D. W., and I. A. Todd:** *Rational quartic primals and associated Cremona transformations of four-dimensional space.* Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 324—339 (1937).

A classification of quartic rational varieties  $V_3^4$  in  $S_4$  represented in  $S_3$  by a linear system,  $\infty^4$ , of quartic surfaces, whose base locus consists of irreducible curves no two of which have a point in common. Also a study of some Cremona transformations in  $S_4$  to which these varieties give rise in special cases. O. Zariski (Baltimore).

**Ehresmann, Charles:** *Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles.* J. Math. pures appl., IX. s. 16, 69—100 (1937).

In a preceding paper (this Zbl. 9, 329) the Author investigated the topology of complex grassmanian varieties. In the present paper the same methods are applied to a class of real varieties, including: the real grassmanian varieties; the variety of linear elements of a real projective space  $[n]$ ; and, more generally, the variety of composite elements  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  in  $[n]$  (sequences of subspaces  $[a_i]$  such that  $[a_i] \subset [a_{i+1}]$ ). Given such a sequence of subspaces, the set of all spaces  $[k]$  having at least a space  $[i]$  in common with each  $[a_i]$  is denoted by the symbol  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ . The varieties  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ , where the spaces  $[a_i]$  are extracted arbitrarily from a fixed sequence  $[0], [1], \dots, [n-1], [n]$ , subdivide the variety  $V$  of the spaces  $[k]$  of  $[n]$  into open cells. Similar subdivisions are used for the other spaces under consideration and furnish a practical method for the determination of their Betti groups. Thus, the Betti groups (mod 2) are explicitly determined and the conclusions concerning the full Betti groups are of a nature as to be directly applicable to any concrete case. — The topology of the space of linear elements of  $[n]$  is applied toward the derivation of necessary conditions for the existence of an absolute parallelism in  $[n]$ . For the existence of the parallelism it is necessary that the space of linear elements be homeomorphic to the direct product of a  $[n]$  and a  $[n-1]$ . The comparison of the Betti groups shows that this is not the case if  $n$  is even. If  $n$  is odd, the comparison of the intersection numbers of the cycles (mod 2) shows that  $n$  must either have the value 3 (parallelism of Clifford) or 7 (existence proved by F. Vaney in his thesis, 1929) or must be of the form  $16r-1$  (existence undecided). — Having recourse to

the fact that the group space  $R$  of the group of orthogonal transformations in  $n + 1$  variables covers  $2^n$  times the variety of the elements  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  of the space  $[n]$ , the Author gives an elementary proof of the well known fact that the Poincaré group of  $R$  is of order 2.

O. Zariski (Baltimore).

### Differentialgeometrie:

Vyěchlo, F.: Sur le complexe linéaire considéré comme une variété à trois dimensions. Extrait de Bull. int. Acad. Sci. Bohême (1934) 2 pag.

Die Kleinsche Abbildung des Geradenraumes  $R_3$  kann als eine konform-euklidische  $V_4(u)$  aufgefaßt werden, und zwar mit dem metrischen Tensor

$$a_{\lambda\mu} = \frac{g_{\lambda\mu}}{g^{1/6}}, \quad (\lambda, \mu = 1, \dots, 4)$$

wo

$$g_{\lambda\mu} = \left( x, x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{\partial}{\partial u_\lambda} x_\mu \right), \quad \left( x_\lambda = \frac{\partial}{\partial u_\lambda} \right),$$

$$g = \text{Det. von } g_{\lambda\mu}$$

und  $x$  die Plückerschen Koordinaten einer Geraden sind. In dieser Auffassung wird ein linearer Komplex auf eine  $V_3$  abgebildet, deren Gaußsches Krümmungsmaß gleich  $p^{-2}$  ist, wo  $p$  das Komplexparameter ist.

Hlavatý (Praha).

Bompiani, Enrico: Sulle curve sgheembe. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 515—552 (1936).

Considérons dans l'espace projectif  $S_3$  une courbe gauche  $C$ , un de ses points (réguliers)  $O$  et un plan  $\pi$  ne passant pas par  $O$ . La courbe  $\Gamma$  intersection de  $\pi$  avec la développable circonscrite à  $C$  et la courbe  $C_0$  qu'on obtient en projetant  $C$  du point  $O$  sur  $\pi$ , se touchent au point  $P$  déterminé sur  $\pi$  par la droite tangente en  $O$  à  $C$ ; les courbes  $\Gamma$  et  $C_0$  admettent toujours l'invariant  $I$  projectif de contact en  $O$  (rapport de leurs courbures dans ce point, si l' $S_3$  est euclidien) égal à  $3/4$ . Ce résultat, qu'on peut dire connu, constitue le point de départ de la recherche; l'A. commence par le compléter en faisant l'étude d'autres éléments géométriques invariants relatifs à  $\Gamma$  et  $C_0$ , et en déterminant la valeur de  $I$  lorsque  $O$  est l'origine d'une branche singulière de  $C$ . Il résout de plus la question réciproque de construire  $C$  lorsqu'on connaît seulement  $\Gamma$  et  $C_0$  (tangentes en  $P$ , avec l'invariant  $I = 3/4$ ); les courbes  $C$  sont alors  $\infty^4$ , transformées d'une quelconque d'entre elles au moyen des homologies de l'espace ayant comme plan fondamental  $\pi$ : et l'examen de ces homologies le conduit à introduire des invariants projectifs nouveaux relatifs à deux éléments curvilignes de l'espace. Les  $\infty^4$  courbes  $C$  susdites sont représentées paramétriquement avec des formules (faisant intervenir des quadratures) déjà obtenues par S. Lie, mais dont ici l'A. précise la signification géométrique; il montre en effet que les projections sur  $\pi$  de ces différentes courbes à partir d'un de leurs points variable donnent lieu seulement à  $\infty^1$  courbes  $C_\tau$  (et non à  $\infty^5$ ), et qu'on peut obtenir le système de ces courbes  $C_\tau$  — et par conséquent aussi celui des  $\infty^4$  courbes gauches  $C$  — en fixant pour  $\Gamma$  le paramètre et le facteur de proportionnalité des coordonnées projectives homogènes. L'A., en outre, prouve qu'il y a des surfaces dont les asymptotiques se projettent d'un centre opportun sur  $\pi$  suivant le réseau formé par les courbes  $C_\tau$ ; il assigne des formes canoniques pour les équations différentielles satisfaites par les courbes  $C$  et  $\Gamma$ ; enfin il détermine un invariant infinitésime (pseudo-arc) et un invariant fini (pseudo-courbure) de  $\Gamma$  et des courbes  $C$ , se réduisant en particulier — lorsque l' $S_3$  est euclidien et  $\Gamma$  coïncide avec l'absolu — aux invariants récemment introduits par E. Cartan (La méthode du repère mobile, etc. [Paris: Hermann 1935]; ce Zbl. 10, 395) pour les courbes  $C$  isotropes.

Beniamino Segre (Bologna).

Terracini, Alessandro: Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 449—478 (1936).

C. Segre a jadis étudié au point de vue projectif différentiel les variétés lieux d'espaces linéaires [cfr. Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910)], et en particulier les



systèmes  $\Sigma^{\infty 1}$  de  $S_h$  d'un  $S_r$  dont deux  $S_h$  consécutifs quelconques sont incident le long d'un  $S_p$  ( $0 \leq p \leq h-1$ ); cette locution abrégée est ici précisée d'une façon bien nette, avec l'introduction d'un ordre  $\sigma^{(p)}$  d'approximation pour l'incidence de deux  $S_h$  consécutifs de  $\Sigma$  le long d'un  $S_p$  [cfr. aussi A. Terracini, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 186 (1936); ce Zbl. 13, 415, où sont résumés les principaux résultats de ce Mémoire]. —  $\sigma^{(p)}$  est un nombre entier que l'A. définit d'abord d'une façon algorithmique (v. le dernier l. c.), sauf à prouver ensuite son caractère projectif et autodualistique; de plus, l'A. démontre qu'un système  $\Sigma$  se représente sur la variété grassmannienne relative aux  $S_h$  de  $S_r$  avec une courbe quasi-asymptotique, fournissant une simple interprétation géométrique pour l'ordre  $\sigma^{(p)}$  d'approximation, et que ce caractère est toujours un nombre paire  $\geq 2$ , borné supérieurement par les limitations

$$\sigma^{(p)} \leq \binom{2h-2p+2}{h-p+1} - h + p - 2 \quad \text{si } h-p \text{ est paire,}$$

$$\sigma^{(p)} \leq \binom{2h-2p+2}{h-p+1} - h + p - 1 \quad \text{si } h-p \text{ est impaire,}$$

pourvu que les  $S_h$  de  $\Sigma$  ne soient pas deux à deux incidents le long d'un  $S_p$ : dans ce dernier cas il pose  $\sigma^{(p)} = \infty$ . — Ces résultats sont ultérieurement approfondis pour  $r=5$ ,  $h=2$ ,  $p=0$ , c'est-à-dire pour le cas le plus simple, présentant un intérêt effectif, où  $\Sigma$  est constitué par  $\infty^1$  plans de  $S_5$  touchant une même courbe  $C$ . Un tel système  $\Sigma$  est déterminé lorsqu'on connaît  $C$  et une courbe  $D$  quelconque — directrice de  $\Sigma$  — rapportée biunivoquement à  $C$ ; en correspondance on obtient une représentation analytique de  $\Sigma$  moyennant un système différentiel linéaire ( $\Sigma_0$ ) de deux équations avec deux fonctions inconnues d'une même variables. Les 9 valeurs 2, 4, ..., 16,  $\infty$  a priori possibles pour  $\sigma^{(0)}$  se traduisent par des conditions différentielles nécessaires et suffisantes, écrites dans le Mémoire explicitement dans tous les cas et d'une complication croissante avec  $\sigma^{(0)}$ , relatives aux coefficients du système ( $\Sigma_0$ ). L'A. démontre la compatibilité de ces conditions avec ( $\Sigma_0$ ), c'est-à-dire l'existence des systèmes  $\Sigma$  correspondants aux valeurs prévues de  $\sigma^{(0)}$ , en s'appuyant — pour le cas  $\sigma^{(0)} = \infty$  — à une recherche antérieure de U. Morin [Atti R. Istit. Veneto 89 (1930)]; enfin il donne des interprétations géométriques élégantes pour ces conditions, en montrant dans les différents cas leur équivalence avec l'existence de certains systèmes linéaires sur-abondants d'hypersurfaces d'ordre 1, 2, ou 3 de  $S_5$ , contenant un nombre convenable de plans consécutifs de  $\Sigma$ .

Beniamino Segre (Bologna).

**Popa, Ilie:** Sur les suites de Laplace périodiques. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 644—646 (1937).

En généralisant la définition classique de la congruence  $W$ , l'auteur définit comme congruence  $W$  en espace projectif  $S_n$  celle pour laquelle les coordonnées linéaires du rayon générique satisfont à une même équation aux dérivées partielles d'ordre  $n-1$ . Cela posé, pour chaque suite de Laplace périodique à période paire les congruences engendrées par les droites qui joignent les transformées  $x_i, x_{i+2}$  de la suite sont  $W$ . Le théorème n'est plus vrai si la suite est à période impaire. *S. Finikoff* (Moscou).

**Finikov, S.:** Sur les suites de Laplace à deux congruences projectivement applicables. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 243—246 (1937).

L'A. étudie ici les congruences de droites de l'espace ordinaire qui sont applicables projectivement de 1<sup>ère</sup> espèce (c'est-à-dire avec une déformation projective de Fubini-Cartan) ou de 2<sup>de</sup> espèce (c'est-à-dire avec une déformation projective de Terracini) sur une de leurs transformées de Laplace d'ordre 1, 2 ou 3; il obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes (en partie connues) concernant les invariants de Darboux des congruences envisagées, et un certain nombre d'exemples. *Segre*.

● **Cartan, E.:** Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Rédigées par P. Vincensini. (Cahiers sci. Publiés par Gaston Julia. Fasc. 17.) Paris: Gauthier-Villars 1937. VI, 308 pag. et 34 fig. Fres. 85.—

Die in diesem Werke entwickelte Theorie beruht größtenteils auf der Anwendung der

Methode des repère mobile auf die projektive Gruppe. Einerseits dem didaktischen Zwecke entsprechend elementar begründet, andererseits aber weit geführt und reich an Resultaten, erscheint diese Theorie als eine vortreffliche Einführung in die projektive Differentialgeometrie und die allgemeine Theorie des repère mobile (vgl. dies. Zbl. **10**, 395) und läßt die Bedeutung dieser letzteren deutlich erkennen. Um so wertvoller kann das Werk angesehen werden, als darin auch andere für das Gebiet fruchtbare Methoden, z. B. die Methode von Wilczynski, ihren Platz finden. Das Buch besteht aus zwei etwa gleichen Teilen, von denen der erste der klassischen projektiven Differentialgeometrie, der zweite den krummen projektiven Räumen gewidmet ist. Im ersten Teile werden geradlinige Bewegungen bezüglich der projektiven Gruppe, projektive Differentialgeometrie der ebenen Kurven und projektive Differentialgeometrie der Flächen im dreidimensionalen Raume behandelt. Diese letztere wird so weit geführt, als es für das Verständnis der Grundbegriffe der Theorie und das Studium der bezüglich mit derselben Methode des repère mobile verfaßten Originalarbeiten z. B. über die projektive Deformation von Flächen notwendig erscheint. Im zweiten Teile wird der Begriff der p. K. (d. h. projektiven Konnexion) für  $n$ -dimensionale Räume eingeführt, und zwar mittels einer Matrix  $\|\omega^i_j\|$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ;  $\omega^0_0 = 0$ ) von Pfaffschen Formen  $\omega^i_j$  in  $n$  Veränderlichen; diese Formen werden als Komponenten der infinitesimalen Veränderung eines in jedem Punkte des Raumes erklärten Repères aufgefaßt. Es folgt der Begriff der Äquivalenz von Räumen mit p. K., Betrachtungen über lokale Deformation von Räumen mit p. K. auf den projektiven Raum, der Begriff der Krümmung und der Torsion, die Formeln von Bianchi, die Bestimmung von Räumen mit p. K. bei gegebenen geodätischen Linien und in diesem Zusammenhang Betrachtungen über geodätische Deformation von Flächen im gewöhnlichen euklidischen Raume, die Elemente der Flächentheorie in dreidimensionalen Räumen mit p. K. und der Begriff und Eigenschaften der Holonomiegruppe. Gelegentlich der Überlegungen über die Krümmung und die Torsion werden die Grundlagen der Tensorenrechnung dargestellt.

O. Borůvka (Brno).

**Bortolotti, Enea: Superficie anolomone complementari.** Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 553—576 (1936).

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit können folgendermaßen beschrieben werden:

1. Jedem Punkte  $P \equiv y^a(\xi^r)$  eines linearen  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes  $P_n$  wird eine — nicht durch  $P$  gehende — Hyperebene  $y_a(P)$  zugeordnet. [Dabei sind

$y^a$  ( $a = 0, \dots, n$ ) bzw.  $\xi^r$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \lambda, \mu = 1, \dots, n$ ) projektive homogene bzw. krummlinige Koordinaten im  $P_n$ .] Mit  $P_\lambda$  soll der Treffpunkt der Tangente (in  $P$ ) an die

Parameterlinie  $\xi^\lambda$  (durch  $P$ ) mit  $y_a(P)$  bezeichnet werden. Die Punkte  $P_\Omega$  ( $\Omega, \Lambda \Sigma = 0, 1, \dots, n$ )

bilden ein — dem Punkte  $P$  zugeordnetes — Bezugssimplex, mit dessen Hilfe man

(analog dem Weitzenböck-Vitalischen Verfahren) eine integrable projektive Konnexion mit den Koeffizienten  $\Gamma^A_{\Omega\mu}$ ,  $\Gamma^A_{\Omega 0} = \delta^A_\Omega$  konstruieren kann. Die Änderung der Wahl von  $y_a(P)$  hat eine bahntreue Transformation der affinen Konnexion  $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$  zur Folge. —

2. Im  $P_4$  denkt man sich eine anholonome zweidimensionale Fläche gegeben und außerdem auch die dazu komplementäre anholonome Fläche. Diese Flächen sollen mit  $X^2_{(x)}$

bezeichnet werden ( $x = 1, 2$ ) und ihre Einheitstensoren mit  $B^\nu_{(x)\lambda}$ . Dann können in

üblicher Weise die Eulerschen Krümmungsgrößen für  $X^2_{(x)}$  definiert werden. Von denen sind nur

$$H_{(x)\mu\lambda}{}^\nu = B^\beta_{(x)\lambda} B^\alpha_{(x)\mu} V_{(x)\beta}{}^\nu$$

in bezug auf die obenerwähnte bahntreue Transformation invariant ( $V_\mu$  ist der symbolische Vektor der kovarianten Ableitung in bezug auf  $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ ). — 3. In der  $X^2_{(1)}$  ( $X^2_{(2)}$ )

kann man bekanntlich zwei kontravariante tangentielle Vektoren  $B^\nu_{(1)\alpha}$  ( $B^\nu_{(2)\epsilon}$ ) einführen,

und zwar so, daß  $B^\nu_{(1)\alpha}$ ,  $B^\nu_{(2)\epsilon}$  linear unabhängig sind ( $a b = I, II, e, f = III, IV$ ). Dann

kann man in üblicher Weise die Größen in  $X^{(2)}_{(x)}$  in bezug auf die Transformation der

entsprechenden Vektoren definieren. Auf diese Weise wird  $H_{(1)\mu\lambda}{}^\nu$  ( $H_{(2)\mu\lambda}{}^\nu$ ) mittels der inter-

mediären Komponenten  $H_{(1)ab}{}^e$  ( $H_{(2)ef}{}^a$ ) beschrieben. Die Kompatibilitätsbedingungen für

konjugierte Richtungen in  $X^2_{(1)}$  ( $X^2_{(2)}$ ), das ist  $H_{(1)ab}{}^e v^a w^b = 0$  ( $H_{(2)ef}{}^a p^e q^f = 0$ ), lassen sich



in der Form  $F_{(1)ab} v^a v^b = 0$ ,  $G_{(1)ab} w^a w^b = 0$  ( $F_{(2)ef} p^e p^f = 0$ ,  $G_{(2)ef} q^e q^f = 0$ ) schreiben, wobei bei  $F_{(x)}$ ,  $G_{(x)}$  zwei (nichtabsolute) Tensoren von  $X_{(x)}^2$  sind, welche sich leicht aus  $H_{(x)}$  ableiten lassen. Alle vier hier auftretenden Tensoren lassen sich normalisieren, d. h. man kann aus ihnen absolute Tensoren bilden. — 4. Die Tangenten von  $P_0$  zu dem „Kommerellschen Kegelschnitt“ von  $X_{(x)}^2$  sind die Nullrichtungen von einem absoluten Tensor  $b_{1a}$  (bzw.  $b_{(2)ef}$ ), der aus den Komponenten der obenerwähnten, aber nicht aufgeschriebenen

Eulerschen Krümmungsgrößen ableitbar ist. — 5. Die hier erwähnte Theorie wird auf eine  $X_4$  angewandt, wobei man in natürlicher Weise auf das Schoutensche Anholonomitätsobjekt stoßen muß. — Die Arbeit schließt mit zahlreichen Literaturangaben. (Der Kürze halber haben wir an der Symbolik des Verf. nicht festgehalten.)

Hlavatý (Praha).

**Hokari, Shisanji:** Winkeltreue Transformationen und Bewegungen im Finslerschen Raume. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 5, 1—8 (1936).

Anschließend an Cartan untersucht der Verf. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich verschiedene Finsler-metrische Begriffe bei der Transformation

$$\tilde{x}^i = x^i + \xi^i(x) dt$$

reproduzieren. Als Beispiel soll hier die Verallgemeinerung der Killingschen Gleichung

$$\xi_{i/j} + \xi_{j/i} + 2C_{ijk} \xi^k /_0 = 0$$

für die starre Bewegung erwähnt werden.

Hlavatý (Praha).

**Hombu, Hitoshi:** Die Krümmungstheorie im Finslerschen Raume. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 5, 67—94 (1936).

In einem  $n$ -dimensionalen Finslerschen Raume  $K_n$ , der auf die Koordinaten  $x^a$  bezogen wird und mit der Cartanschen Übertragung  $C_n$  (in bezug auf den Fundamental-tensor  $g_{\lambda\mu}(x, x')$ ) ausgestattet wird, sei eine  $X_m$  durch die Parametergleichungen  $x^a = x^a(y^a)$  gegeben ( $\nu, \lambda, \mu = 1, \dots, n$ ;  $a, b, c = 1, \dots, m$ ). Das übliche Projektionsverfahren, angewandt auf die absoluten Differentiale (nicht auf kovariante Ableitungen!) ergibt die Konnexionskoeffizienten für  $X_m$ . — Die zu  $g'_{ab}$  (das ist zum metrischen Tensor der  $X_m$ ) gehörige Cartansche  $C_m$  ist allgemein von der — durch das Finsler-orthogonale Projektionsverfahren gewonnene — Konnexion verschieden. — In einem  $K_n$  existieren bekanntlich zwei Arten von kovarianten Ableitungen (eine bezieht sich auf die Koordinaten, die andere auf das ausgezeichnete Linienelement). Für die Theorie einer  $K_m$  in  $K_n$  muß also dementsprechend die  $D$ -Symbolik (vgl. dazu Struik, dies. Zbl. 8, 84, und Schouten-Struik, dies. Zbl. 11, 174) verallgemeinert werden. Diese Verallgemeinerung bildet gerade den springenden Punkt der Arbeit. Dem Verf. ist es gelungen, zwei Arten von Ableitungssymbolen,  $\overset{0}{D}_a, \overset{1}{D}_a$ , einzuführen, von denen das zweite sich ausschließlich auf die Ableitungen nach dem ausgezeichneten Element bezieht. Neben diesen Symbolen wird noch  $\overset{0}{D}_0 \equiv y^b \overset{0}{D}_b$  gebraucht. Mit dem so gewonnenen Apparate werden dann die Frenetschen Formeln für  $K_m$  in  $K_n$  sowie auch ihre Integrabilitätsbedingungen (das ist Verallgemeinerung der Gaußschen, Mainardischen und Kühneschen Gleichungen) und der anholonome Fall betrachtet. Wegen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden, da eine tiefergehende Beschreibung eine Menge von Hilfsbegriffen benötigte, deren Erklärung den Rahmen eines Referates überschreiten würde. [Für Frenetsche Formeln ( $m \geq 1$ ), jedoch nicht im Finslerschen Raume, vgl. das obenerwähnte Buch von Struik und die Arbeit von Tucker, dies. Zbl. 12, 372.]

Hlavatý (Praha).

**Haimovici, Mendel:** Sur les espaces de Finsler à connexion affine. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 837—839 (1937).

Vorläufige Mitteilung, erläutert durch ein Beispiel: Die Gleichung

$$L(x^i - x_0^i) = 1 \quad (1)$$

soll die Flächenfamilie darstellen, welche sich bei der Fundamentalgruppe eines Finslerschen Raumes reproduziert. Mit  $\xi^i$  sollen die Komponenten eines Vektors in dem begleitenden Bezugssystem bezeichnet werden, in welchem (1) gilt, während  $l^i$  die Komponenten desselben Vektors in dem Koordinatensystem bedeuten. Dann gilt eine Relation der Form (2)  $\xi^i = a_j^i l^j$ . Vergleicht man nun die Inkremente von  $\xi^i$ , welche dieser Vektor bei der Parallelverschiebung bzw. gegenüber der Transformationsgruppe hat, so bekommt man, mit Hilfe von (2), ein System von Differentialgleichungen für  $a_j^i$ . Einer Lösung  $a_j^i$  entspricht dann die Finslersche Metrik  $ds = L(a_j^i dx^j)$ .

Hlavatý (Praha).

**Whittaker, E. T.: On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus.**

Proc. Roy. Soc. London A 158, 38—46 (1937).

Ist  $R_{pq}$  ein selbstdualer Sechservektor in der Minkowskiwelt, d. h. ist

$$R_{01} = i R_{23}, \quad R_{02} = i R_{31}, \quad R_{03} = i R_{12} \quad (ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2)$$

und ist außerdem

$$R_{01}^2 + R_{02}^2 + R_{03}^2 = 0,$$

so transformieren sich

$$\sqrt{2} \varphi_1 = \sqrt{R_{01} + i R_{02}}, \quad \sqrt{2} \varphi_2 = \sqrt{-R_{01} + i R_{02}}$$

wie die Komponenten eines Spinors. Demzufolge lassen sich alle Spinorgleichungen, wenn auch irrational und häufig unter Benutzung von willkürlichen Hilfstensoren, als Tensorgleichungen schreiben. Das wird an einigen Beispielen, u. a. an den Diracschen Gleichungen, näher ausgeführt.

van der Waerden (Leipzig).

### **Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konkaves und Verwandtes:**

**Maak, Wilhelm: Integralgeometrie. XVIII. Grundlagen der ebenen Integralgeometrie.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 83—110 (1937).

Die Sätze der Integralgeometrie sind bislang fast ausschließlich durch Rechnung gewonnen worden. Verf. verfolgt das Ziel, die für diese Rechnungen erforderlichen Voraussetzungen durch mehr im Wesen der Sache begründete zu ersetzen. In der vorliegenden Arbeit werden (I. Teil) die allgemeinen Grundlagen hierzu gegeben und alsdann (II. Teil) Sätze der Integralgeometrie, zunächst in der euklidischen Ebene, behandelt. — Der I. Teil entwickelt eine Theorie der, wie man sagen kann, Riemannschen (d. h. nicht notwendig volladditiven) Integrale von reellen Funktionen  $f(x) = f(x|G)$ , deren Definitionsbereich eine vorgegebene Gruppe  $G$  ist (also  $x \subset G$ ). a) Ausgangspunkt ist der Begriff der rechts- (bzw. links-) invarianten Mittelwertoperation  $M_r(f(x)) = M_r(f)$  bzw.  $M_l(f(x))$ , d. h. einer reellen Funktion mit einem gegebenen System  $S$  von  $f(x|G)$  als Definitionsbereich und mit folgenden Eigenschaften: 1. Rechts- bzw. Linksinvarianz:  $M_r(f(xd)) = M_r(f(x))$  bzw.  $M_l(f(cx)) = M_l(f(x))$  für beliebiges festes  $d \subset G$  bzw.  $c \subset G$ . Sind Rechts- und Linksinvarianz gleichzeitig vorhanden, so heißt  $M$  translationsinvariant. 2. Additivität:  $M(f + g) = M(f) + M(g)$ . 3. Monotonie:  $M(f) \leq M(g)$ , wenn  $f \leq g$  für alle  $x \subset G$ . 4. Normierung:  $M(1) = 1$ . — b) Die Funktionen von  $S$  werden dabei als mittelbar (bzw. rechts- oder linksmittelbar) angenommen, d. h. es soll zu beliebigen  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$  eine Zahl  $A$  und endlich viele  $a_j \subset G$

geben,  $j = 1, \dots, n$ , so daß für alle  $d \subset G$ ,  $c \subset G$  gilt:  $A - \varepsilon \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n f(ca_j d) \right) \leq A + \eta$

(bzw. es soll diese Beziehung nur mit  $a_j d$  oder nur mit  $ca_j$  gelten, statt mit  $ca_j d$ ). Ferner soll  $f \equiv 1$  in  $S$  enthalten sein, sowie mit  $f(x)$  auch  $f(cxd)$  [bzw.  $f(xd)$  oder  $f(cx)$ ] bei beliebigen, festen  $c, d \subset G$ , schließlich mit  $f$  und  $g$  auch  $f + g$ . Je nachdem heiße  $S$  mittelbar (rechts- oder linksmittelbar). — c) Nun gilt der grundlegende Eindeutigkeitsatz: Jede  $M_r(f)$  über einem linksmittelbaren  $S$  ist eindeutig bestimmt und zugleich linksinvariant. — Als dann wird eine später anzuwendende, dem Riemannschen Integralsatz nachgebildete Bedingung für Mittelbarkeit einer beschränkten  $f(x|G)$  angegeben. Beispiele mittelbarer Funktionen. — II. Der weitere Gedankengang ist nun



der: Man bezeichne als Maß jede reelle, additive, monotone, normierte Mengenfunktion über einem geeigneten Mengenkörper  $K$  als Definitionsbereich. Es bestehe nun  $K$  aus den ebenen (im Einheitsquadrat enthaltenen) Bereichen mit streckbarem Randes, so daß über  $K$  der Jordaninhalt  $J$  definiert und ein Maß ist. Ferner sei  $G$  die Gruppe, welche aus der der Schiebungen des Einheitsquadrates durch Reduktion der Koordinaten mod 1 hervorgeht: Gruppe der Schiebungen des Einheitsquadrates in sich. Dann erweist sich jedes Maß über  $K$  als schiebungsinvariante Mittelwertoperation über dem mittelbaren System der sog. Verteilungsfunktionen  $f(x|G)$ . Daraus folgt:  $J$  ist das einzige schiebungsinvariante Maß über  $K$ . — Lassen sich nun schiebungsinvariante Maße über  $K$  noch auf andere Arten definieren, wie das z. B. durch in der Integralgeometrie auftretende Integrale möglich ist, so müssen diese Maße bzw. Integrale sämtlich untereinander gleich sein. Die Ausdehnung der Ergebnisse auf nicht im Einheitsquadrat enthaltene Bereiche gelingt unmittelbar. — Diese bzw. entsprechenden Überlegungen werden nun auf verschiedene Sätze der Integralgeometrie angewandt, wobei auch andere Maße und Gruppen in Betracht gezogen werden. (XVII. vgl. dies Zbl. 15, 121.)

Haupt (Erlangen).

Sz. Nagy, Gyula v.: Mehrzügige Kurven im mehrdimensionalen Raume. Mat. termézet. Ért. 55, 540—548 u. deutsch. Zusammenfassung 549 (1937) [Ungarisch].

Es kann nur über den deutschen Auszug berichtet werden. Es sei  $R_q$  der reellen projektive  $q$ -dimensionale Raum. Die Gesamtzahl der Züge und der Doppelpunkte einer Kurve  $n$ -ter Ordnung im  $R_q$  ist höchstens  $(n + 1 - q)$ , falls  $n < 2q$  (dabei sind die Rückkehrpunkte zu den Doppelpunkten zu rechnen). Für  $2q \leq n$  kann die Anzahl unbeschränkt sein. Ist sogar  $n < 2(q - 1)$ , so ist die Gesamtanzahl der Züge und der wirklichen und scheinbaren Doppelpunkte höchstens  $(n + 2 - q)$ . Verschärfung, falls der Index der Kurve  $n$ -ter Ordnung größer als 1 ist. Im übrigen werden die wichtigsten Eigenschaften der Kurven  $n$ -ter Ordnung im  $R_n, R_{n-1}$  und  $R_{n-2}$  bestimmt.

Haupt (Erlangen).

Sz. Nagy, Gyula v.: Über Kurven vom Maximalindex in mehrdimensionalen Räumen. Mat. termézet. Ért. 55, 550—570 u. deutsch. Zusammenfassung 571—573 (1937) [Ungarisch].

Es kann nur über den deutschen Auszug berichtet werden. Unter einer einzügigen Kurve im reellen projektiven  $q$ -dimensionalen Raum  $R_q$  wird ein reelles, eindeutiges stetiges Kreisbild verstanden mit überall eindeutigem, stetigem  $k$ -dimensionalem Schmiegraum ( $k = 1, \dots, q - 1$ ). Eine Kurve ist im allgemeinen eine Summe von Zügen. Bei Bestimmung der (linearen) Ordnung und des Index einer Kurve wird jeder Punkt des Durchschnittes von Kurve und Hyperebene mit seiner Vielfachheit gezählt. Eine Kurve  $K_n^{(q)}$  von  $n$ -ter Ordnung im  $R_q$  heißt reduzibel, wenn ihre Züge in zwei (oder mehr) Systeme zusammengefaßt werden können, so daß die Summe der Ordnungen der Kurven, welche von den Zügen je eines Systems gebildet werden, gleich  $n$  ist. Aus der reichhaltigen Arbeit sei genannt: Der maximale Index eines  $K_n^{(q)}$  ist  $(n - q^*)$ , wobei  $q^* = q$  oder  $q^* = q - 1$ , je nachdem  $q \equiv 0 \pmod{2}$  oder  $q \equiv 1 \pmod{2}$ . Jeder Zug einer  $K_n^{(q)}$  vom Maximalindex (kurz: MI) ist wieder vom MI, und zwar gibt es keinen bzw. höchstens  $\left\lfloor \frac{n + 2 - q}{2} \right\rfloor$  Züge vom Index Null, je nachdem  $q \equiv 1$  bzw.  $q \equiv 0$ ; übrigens ist die Maximalzahl der Züge  $(n + 1 - q) = m$ , und falls  $m$  erreicht wird, sind alle Züge vom Index 1 bzw. alle bis auf einen Zug, welcher den Index Null besitzt, vom Index 1, je nachdem  $q \equiv 1$  bzw.  $q \equiv 0$ . Die Kurven, in welche eine reduzible MI-Kurve zerfällt, sind wieder vom MI. Bezeichnet  $i$  bzw.  $s$  den Index einer MI-Kurve  $K_n^{(q)}$  bzw. die Summe der Indizes ihrer Züge, so kann aus  $i < s + q^*$  auf Irreduzibilität geschlossen werden; zerfällt die MI-Kurve in  $k$  Züge, so ist  $s + kq^* \leq n$ . Die Projektion einer MI-Kurve  $K_n^{(q)}$  auf eine Hyperebene aus einem nicht auf  $K_n^{(q)}$  gelegenen Punkte bzw. aus einem gewöhnlichen Punkte der  $K_n^{(q)}$  ist bei  $q \equiv 1$  eine MI-Kurve  $K_n^{(q-1)}$  bzw.  $K_{n-1}^{(q-1)}$ . Jede MI-Kurve  $K_n^{(q)}$  läßt sich durch Projektionen in eine MI-Kurve

$K_{n-q+2}^{(2)}$  und auch  $K_{n-q+3}^{(3)}$  überführen. Existenzbeweise für einzügige MI-Kurven  $K_n^{(q)}$  für jedes  $n \geq 4$  sowie für MI-Kurven  $K_n^{(q)}$ , die aus  $(n+1-q)$  Zügen bestehen, für jedes  $q \geq 2$  und jedes  $n \geq q$ . Ferner werden Sätze bewiesen wie der folgende: Eine Hyperebene kann die Schmiegräume  $R_{q\sigma}$ ,  $\sigma = 1, \dots, s$ , welche den Punkten  $P_\sigma$  der MI-Kurve  $K_n^{(q)}$  zugehören, nur dann enthalten, wenn  $q_1 + \dots + q_s + r \leq q^*$ , wo  $r$  die Anzahl der ungeraden Zahlen unter den  $q_\sigma$  bedeutet. *Haupt (Erlangen).*

### **Topologie:**

**Drape, Elisabeth:** Über die Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplexe. Deutsche Math. 1, 805—824 (1936).

Die Darstellung durch Streckenkomplexe hängt von einer willkürlich gezogenen Kurve  $C$  durch die Windungspunkte  $a_1, \dots, a_q$  ab. Es kann deshalb vorkommen, daß dieselbe Fläche durch topologisch verschiedene Komplexe dargestellt wird, und umgekehrt, daß verschiedene Flächen zu demselben Komplex gehören. Man fragt deshalb nach Äquivalenzbedingungen: Wann sind zwei Komplexe äquivalent in dem Sinne, daß sie bei geeigneter Wahl von  $C$  dieselbe Fläche darstellen können, und wann sind zwei Flächen äquivalent, so daß sie durch denselben Komplex darstellbar sind? Die Frage wird durch Einführung eines verfeinerten Komplexes behandelt. Es wird bewiesen, daß Komplexe (oder Flächen) mit einem logarithmischen Windungspunkt über jedem  $a_i$  immer äquivalent sind, wenn sie nur dasselbe  $q$  haben. Für geschlossene, schlichtartige Komplexe gleichen Grades wird die Äquivalenz unter der Bedingung gezeigt, daß die Vielecke paarweise in ihrer Eckenzahl übereinstimmen. *Ahlfors.*

**Brusotti, Luigi:** Le treece di Artin nelle topologia proiettiva ad affine. Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 101—118 (1936).

Es werden Verkettungen im projektiven dreidimensionalen Raum betrachtet und gezeigt, daß sich dieselben in projektiv geschlossene Zöpfe deformieren lassen. Ein projektiv geschlossener Zopf entsteht aus einem offenen Zopf des affinen Raumes mit den Anfangspunkten  $A_i$  und den Endpunkten  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), indem die entsprechenden Anfangs- und Endpunkte wie üblich durch Kurvenstücke einer Ebene verbunden werden, die entweder ganz im Endlichen verlaufen oder die unendlich ferne Ebene je einmal durchsetzen. Die Deformationen lassen sich in projektive oder affine einteilen, je nachdem über das Unendliche hinweg deformiert wird oder nicht. Die Zopfform läßt sich durch affine Deformation erreichen. Durch projektive Deformation läßt sich weiterhin erreichen, daß die ergänzenden Kurvenstücke sämtlich das Unendliche passieren. *K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).*

**Wilder, R. L.:** Some unsolved problems of topology. Amer. Math. Monthly 44, 61—70 (1937).

Ausarbeitung eines 1935 gehaltenen Vortrages über einige ungelöste Probleme der mengentheoretischen Topologie. *Nöbeling (Erlangen).*

**Lefschetz, S.:** Locally connected sets and their applications. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 715—717 (1936).

Es werden verschiedene Typen des mehrdimensionalen lokalen Zusammenhanges und ihre Beziehungen zu Begriffen wie Retrakt, stetiger Komplex, lokale Zusammenziehbarkeit u. dgl. untersucht. *P. Alexandroff (Moskau).*

**Kolmogoroff, A.:** Über offene Abbildungen. Ann. of Math., II. s. 38, 36—38 (1937).

The author gives an example of an interior transformation which maps a one-dimensional continuum onto a two-dimensional continuum. This provides the answer to a question raised by S. Eilenberg (see Fundam. Math. 24, 175; this Zbl. 10, 277) as to whether the dimensionality of a compact set could be increased under an interior transformation. In the author's example repeated use is made of an interior mapping of a torus surface onto a Möbius band which sends one of the generating circles on the torus into the boundary curve of the band. *G. T. Whyburn (Virginia).*



**Montgomery, Deane:** Pointwise periodic homeomorphisms. Amer. J. Math. 59, 118—120 (1937).

Let  $M$  be a connected metric space each of whose points possesses a neighbourhood which is homeomorphic to the euclidean  $n$ -space. It is proved that, a topological mapping of  $M$  onto itself which is periodic at each point (where the period may depend on the point) is periodic (with a period independent of the special points). *Busemann.*

**Kakutani, Shizuo:** On general quasi-metric spaces. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. III. s. 18, 641—658 (1936).

Es seien  $A$  und  $B$  zwei abgeschlossene Mengen eines metrischen Raumes  $R$  und

$$\overline{AB} = \sup_{a \in A, b \in B} \{\varrho(a, b)\}, \quad \underline{AB} = \inf_{a \in A, b \in B} \{\varrho(a, b)\},$$

$$\overrightarrow{AB} = \sup_{b \in B} \left\{ \inf_{a \in A} \varrho(ab) \right\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Mengenfunktionen  $\overline{AB}$ ,  $\underline{AB}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  den folgenden Bedingungen genügen:

1.  $\overline{AB} \geq \overrightarrow{AB} \geq \underline{AB}$ ,  $\overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$ ; 2.  $\overline{AB} + \overrightarrow{BC} \geq \overline{AC}$ ;
3.  $\underline{AB} + \overrightarrow{BC} \geq \underline{AC}$ ; 4.  $\overrightarrow{AB} + \underline{BC} \geq \underline{AC}$ ; 5.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \geq \overrightarrow{AC}$ .

Verf. beweist umgekehrt, daß ein abstraktes System  $R^*$  von Elementen  $A, B, \dots$ , für welches drei den Bedingungen 1—5 genügende Elementenfunktionen  $\overline{AB}$ ,  $\underline{AB}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  eingeführt sind, sich als ein System von abgeschlossenen Mengen eines metrischen Raumes  $R$  darstellen läßt.

*A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Pauc, Chr.:** Recherches des ensembles denses dans un ensemble  $M$  donné appartenant à un espace topologique. Bull. Soc. Math. France 64, 220—230 (1936).

The author defines certain operations with respect to transfinite sequences and employs these in a study of the sets which are dense in a given Hausdorff space. The results of this study are applied to yield conclusions concerning separability, and in particular concerning the relation between separability and the property that every uncountable subset have a point of accumulation, in spaces  $D$  and spaces  $E$  of Fréchet.

*G. T. Whyburn (Virginia).*

**Kaufmann, B.:** On infinitesimal properties of closed sets of arbitrary dimension. Ann. of Math., II. s. 38, 14—35 (1937).

Als Hauptresultat wird bewiesen: Ist  $F$  ein  $r$ -dimensionales Kompaktum und  $0 \leq h \leq r$ , so hat die Menge aller  $h$ -dimensionalen konzentrischen Mannigfaltigkeitspunkte von  $F$  die homogene Dimension  $r$  in bezug auf  $F$ . Dabei wird die homogene Dimension einer (nicht notwendig kompakten) Punktmenge  $M$  eines Kompaktums  $F$  in bezug auf eine abgeschlossene  $r$ -dimensionale Punktmenge  $A$  dieses Kompaktums in induktiver Weise wie folgt definiert: Diese Dimension ist die kleinste nichtnegative ganze Zahl  $j$  von folgender Eigenschaft: Je zwei disjunkte abgeschlossene Punkt Mengen  $A_1$  und  $A_2$  von  $A$  können so voneinander durch eine höchstens  $(r-1)$ -dimensionale abgeschlossene Punktmenge  $B$  getrennt werden, daß der Durchschnitt  $M \cdot B$  in bezug auf  $B$  höchstens von der homogenen Dimension  $j-1$  ist. Die in bezug auf  $A$  homogen  $(-1)$ -dimensionalen Mengen  $M$  sind diejenigen, deren Durchschnitt mit  $A$  leer ist. Zum Beweise benutzt der Verf. mehrere interessante neue Begriffsbildungen betreffend Zerlegungen von Kompakta durch ihre abgeschlossene Punkt-mengen, simultane  $\varepsilon$ -Modifikationen, Phragmén-Brouwersche Sätze u. dgl.

*P. Alexandroff (Moskau).*

**Frink, A. H.:** Distance functions and the metrization problem. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 133—142 (1937).

Ein topologischer Raum  $R$  heißt metrisierbar, wenn in ihm ein Abstand  $ab$  der Punkte voneinander eingeführt werden kann, so daß gilt: I.  $ab = 0$  äquivalent mit  $a = b$ ; II.  $ab = ba$  (Symmetrie); III.  $ac \leq ab + bc$  (Dreiecksungleichung). Verf.

nimmt in  $R$  eine Distanz  $\overline{ab}$  als gegeben an mit den Eigenschaften I und IV: Aus  $\overline{ab} < \varepsilon$  und  $\overline{cb} < \varepsilon$  folgt  $\overline{ac} < 2\varepsilon$  (verallgemeinerte Dreiecksbedingung), und leitet aus derselben konstruktiv (also nicht nur Existenzbeweis!) eine äquivalente Metrik  $ab$  von  $R$  mit I, II, III her. Dasselbe führt er durch für eine Distanz  $\overline{ab}$  mit I und V: Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß aus  $\overline{ab} < \delta$  und  $\overline{cb} < \delta$  folgt  $\overline{ac} < \varepsilon$  (gleichmäßige Regularität). Ebenso beweist er durch explizite Angabe einer Metrik die Metrisationssätze von Alexandroff-Urysohn [C. R. Acad. Sci., Paris **177**, 1274 (1923)], Niemytzki [Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 507 (1927)] und Wilson [Amer. J. Math. **53**, 361 (1931); dies. Zbl. **1**, 228]. Verf. zeigt weiter die Metrisierbarkeit eines Raumes mit einer Distanz  $\overline{ab}$ , die neben I folgender Bedingung VII genügt: Zum Punkt  $a$  und zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß aus  $\overline{ab} < \delta$ ,  $\overline{cb} < \delta$ ,  $\overline{cd} < \delta$  folgt  $\overline{ad} < \varepsilon$ . Schließlich zeigt er, daß folgende Bedingung für die Metrisierbarkeit eines Umgebungsraumes notwendig und hinreichend ist: Für jeden Punkt  $x$  des Raumes läßt sich eine monoton fallende Folge von Umgebungen  $U_i(x)$  so bestimmen, daß gilt: Zu jedem Punkt  $a$  und jedem ganzen  $n$  existiert ein  $m = m(a, n) > n$ , so daß für jeden Punkt  $b$  mit  $U_m(a) \cdot U_m(b) \neq 0$  gilt  $U_m(b) \subset U_n(a)$ . Nöbeling.

**Graves, Lawrence M.:** On the completing of a Hausdorff space. Ann. of Math., II. s. **38**, 61—64 (1937).

Unter einer Indexmenge werde eine Menge  $\Sigma$  irgendwelcher Elemente  $\sigma$  verstanden, in welcher eine Relation  $>$  erklärt sei derart, daß I. für je zwei Elemente  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Relation  $\sigma_1 > \sigma_2$  besteht oder nicht; II. aus  $\sigma_1 > \sigma_2$  und  $\sigma_2 > \sigma_3$  folgt  $\sigma_1 > \sigma_3$ ; III. zu je zwei Elementen  $\sigma_1, \sigma_2$  ein Element  $\sigma > \sigma_1$  und  $> \sigma_2$  existiert. — Eine Menge  $X$  von „Punkten“  $x$  sei zu einem Raum gemacht durch Auszeichnung von Mengen  $V_\sigma(x)$  als Umgebungen mit folgenden Eigenschaften: (I) jedes  $V_\sigma(x)$  ist eine  $x$  enthaltende Teilmenge von  $X$ ; (II) aus  $\sigma_1 > \sigma_2$  folgt  $V_{\sigma_1}(x) \subset V_{\sigma_2}(x)$ ; (III) ist  $x \neq y$ , so existiert ein  $\sigma$ , so daß  $V_\sigma(x)$  den Punkt  $y$  nicht enthält; (IV) zu jedem  $\sigma$  existiert ein  $\sigma_1$ , so daß, wenn  $y$  in  $V_{\sigma_1}(x)$  liegt,  $V_{\sigma_1}(x) \subset V_\sigma(y)$  gilt. — Eine gerichtete Menge  $\{x_\alpha\}$  heiße eine Menge von Punkten  $x_\alpha$  aus  $X$ , wobei jedem Index  $\alpha$  einer Indexmenge eindeutig ein Punkt  $x_\alpha$  zugeordnet ist. Sie heißt konvergent gegen  $x$ , wenn für jede Umgebung  $V$  von  $x$  ein  $\alpha_0$  existiert, so daß aus  $\alpha > \alpha_0$  folgt  $x_\alpha \in V$ . Sie heißt fundamental, wenn jedem  $\sigma$  ein  $\alpha_\sigma$  entspricht, so daß für  $\alpha > \alpha_\sigma$  der Punkt  $x_\alpha$  in  $V_\sigma(x_{\alpha_\sigma})$  liegt. — Verf. stellt fest, daß man entsprechend der Cantorsche Konstruktion der reellen Zahlen den Raum  $X$  in einen vollständigen Raum einbetten kann, also einen Raum, in welchem jede fundamentale gerichtete Menge konvergiert. — Verf. gibt noch ein zweites System von Postulaten an einen Raum an, die es gestatten, den Raum vollständig zu machen. Beide Axiomensysteme sind miteinander und mit dem Axiomensystem von Weil [C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1002 (1936); dies. Zbl. **13**, 424] äquivalent.

Nöbeling (Erlangen).

**Harrell, Edgar Graham:** On the topology of a two-parameter, non-metric and non-separable space. I. Ann. of Math., II. s. **38**, 204—211 (1937).

In der Menge  $K$  der Elemente  $a, b, c, \dots, x, \dots$  sei eine Relation  $<$  definiert mit folgenden Eigenschaften von Huntington (The Continuum, Harvard University Press, 1929, 12 u. 44): Wenn  $a \neq b$ , dann  $a < b$  oder  $b < a$ ; wenn  $a < b$ , dann  $a \neq b$ ; aus  $a < b$ ,  $b < c$  folgt  $a < c$ ; ist  $K$  Summe zweier nichtleerer Teilmengen  $K_1$  und  $K_2$ , so daß jedes Element von  $K_1$  jedem Element von  $K_2$  vorangeht, so enthält  $K$  mindestens ein  $x$ , so daß jedes Element von  $K$ , das  $x$  vorangeht bzw. folgt, in  $K_1$  bzw.  $K_2$  liegt; zu je zwei Elementen  $a < b$  existiert ein  $x$  mit  $a < x < b$ . Es sei  $S$  das topologische Quadrat  $(K, K)$  von  $K$ , d. h. der Raum aller Paare  $(x, y)$  mit  $x, y$  in  $K$ . Ein Polygon heißt rechtwinklig, wenn es zusammengesetzt ist aus horizontalen und vertikalen Seiten  $(x, a)$  mit  $a_1 \leq x \leq a_2$  und  $(b, y)$  mit  $b_1 \leq y \leq b_2$ . Verf. beweist: Ein einfaches, geschlossenes, rechtwinkliges Polygon  $p$ , bestehend aus endlich vielen Seiten, zerlegt  $S$  in zwei zusammenhängende Gebiete mit der Begrenzung  $p$ . Verf. bemerkt,



daß man auf Grund dieses Satzes den allgemeinen Jordanschen Kurvensatz (jede einfache geschlossene Kurve  $j$  zerlegt  $S$  in zwei zusammenhängende Gebiete mit der Begrenzung  $j$ ) wie bei Kérékjártó (Vorlesungen über Topologie I, 79—83) beweisen kann. Nöbeling (Erlangen).

**Destouches, Jean-Louis:** Les espaces à caractère fini. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 219—222 (1937).

Verf. nennt einen Fréchet'schen Raum  $(V)$  (Fréchet, Les espaces abstraits, 1928, 173) von endlichem Charakter im Punkte  $a$ , wenn entweder  $a$  isoliert ist oder in der Familie  $\{V_a\}$  der Umgebungen von  $a$  ein  $V_a^{(1)}$  existiert, das in jedem sich nicht auf  $a$  reduzierenden  $V_a$  enthalten ist; gilt dies für jeden Punkt  $a$ , so heißt  $(V)$  ein Raum von endlichem Charakter, kurz ein Raum  $(Cf)$ . —  $\{V_a\}$  ist mit  $V_a^{(1)}$  äquivalent. Die abgeschlossene Hülle  $\bar{E}$  einer Menge  $E$  ist die Menge aller Punkte  $a$  mit  $V_a^{(1)} \cdot E \neq \emptyset$ ; im allgemeinen ist  $\bar{E}$  eine echte Teilmenge von  $\bar{\bar{E}}$ , d. h.  $\bar{E}$  ist keine abgeschlossene Menge; insbesondere kann  $\bar{a}$  mehrpunktig sein; Summe und Produkt abgeschlossener bzw. offener Mengen ist abgeschlossen bzw. offen. — Betrachtet man  $\bar{a}$  statt  $V_a^{(1)}$  als Umgebung von  $a$ , so erhält man die zur ursprünglichen „reziproke Topologie“ des Raumes; in ihr ist  $V_a^{(1)}$  die abgeschlossene Hülle von  $a$ . Das liefert den Satz: Ein Raum  $(Cf)$  ist dadurch charakterisiert, daß  $\bar{E}$  die Summe der abgeschlossenen Hüllen  $\bar{a}$  aller Punkte  $a$  von  $E$  ist. Verf. untersucht einige weitere Eigenschaften der Räume  $(Cf)$ . — Führt man die Mengen  $V_a^{(1)} + \bar{a}$  bzw.  $V_a^{(1)} \cdot \bar{a}$  als Umgebungen ein, so erhält man zwei autoreziproke Topologien. — Beispiele von Räumen  $(Cf)$ : die Räume von Linfield (Thèse, Strasbourg 1924), die diskreten Räume von Alexandroff [C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1649 (1935); dies. Zbl. **11**, 326], die Korpuskularräume und die experimentellen Zellräume des Verf. [C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 192, 434 (1935); dies. Zbl. **10**, 324, 380]. Nöbeling (Erlangen).

**Borsuk, Karol:** Über sphäroidale und  $H$ -sphäroidale Räume. (Ein Beitrag zum Problem der topologischen Charakterisierung der Euklidischen Sphären.) Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 643—660 (1936).

Ein Kompaktum  $F$  heißt ein sphäroidaler Raum, wenn jeder Punkt  $p$  von  $F$  eine beliebig kleine Umgebung  $U(p)$  besitzt von der Eigenschaft, daß  $F - U(p)$  ein absoluter Retrakt ist. Wenn die Forderung,  $F - U(p)$  sei ein absoluter Retrakt, durch die Forderung,  $F - U(p)$  sei in allen Dimensionen azyklisch, ersetzt wird, so erhält man die Definition der  $h$ -sphäroidalen Räume. Von den Eigenschaften der  $h$ -sphäroidalen Räume werden u. a. bewiesen: 1. Jeder endlich-dimensionale  $h$ -sphäroidale Raum ist eine geschlossene Cantorsche Mannigfaltigkeit. 2. Eine echte abgeschlossene Teilmenge eines  $n$ -dimensionalen  $h$ -sphäroidalen Raumes zerschneidet diesen Raum dann und nur dann nicht, wenn sie in der  $(n - 1)$ -ten Dimension azyklisch ist. 3. Die endlich-, und zwar positiv-dimensionalen  $h$ -sphäroidalen Räume sind Streckenbilder mit einem einzigen „cyclic element“ (im Sinne von G. T. Whyburn). 4. Die nirgends dichten abgeschlossenen Mengen eines  $n$ -dimensionalen sphäroidalen Raumes sind mit den höchstens  $(n - 1)$ -dimensionalen identisch; ebenso sind in einem solchen Räume die geschlossenen  $(n - 1)$ -dimensionalen Cantorschen Mannigfaltigkeiten mit den absoluten Gebietsgrenzen identisch. Die  $h$ -sphäroidalen Räume von der Dimension 0, 1, 2 sind den Sphären entsprechender Dimensionszahlen homöomorph. Die  $h$ -sphäroidalen Polyeder sind Homologie-Mannigfaltigkeiten (im Sinne von Alexander-van Kampen-Pontrjagin), die mit den Sphären entsprechender Dimensionszahlen Homologie-äquivalent sind. — Was sphäroidale Räume betrifft, so möge von ihren Eigenschaften auf die folgenden hingewiesen werden: Die Kategorie (im Sinne von Lusternik-Schnirelmann) eines endlich-dimensionalen sphäroidalen Raumes ist gleich zwei; die Fundamentalgruppe eines mindestens zweidimensionalen sphäroidalen Raumes ist die Nullgruppe. — In der Arbeit wird auch auf mehrere ungelöste Fragen hingewiesen. P. Alexandroff (Moskau).

**Whitney, Hassler: Differentiable manifolds in Euclidean space.** Rec. math. Moscou, N. s. 1, 783—785 (1936).

The author considers an abstract topological space  $M$  such that with any point  $x$  of  $M$  there are associated a neighbourhood  $S$  of  $x$  and a transformation  $\varphi_S$  of  $S$  which maps in a  $(1-1)$ -manner  $S$  in the unit open sphere in Euclidean  $m$ -space. If  $S_1$  and  $S_2$  are two such neighbourhoods with common points, the corresponding mappings  $\varphi_{S_1}$  and  $\varphi_{S_2}$  induce a mapping of one part of the unit sphere on another part. If any such map has continuous partial derivatives of all orders  $\leq r$ , with non-vanishing Jacobian, the space  $M$  is said to be a differentiable  $m$ -manifold of class  $C^r$ . — The author announces a number of results concerning the imbedding of differentiable manifolds in Euclidean spaces and the approximation to such manifolds by analytic manifolds. For instance: Any  $m$ -manifold of class  $C^r$  may be imbedded by a regular  $C^r$ -map in Euclidean  $2m$ -space, and by such a map in a  $(1-1)$ -manner in Euclidean  $(2m+1)$ -space. *Saks.*

**Birkhoff, Garrett: Moore-Smith convergence in general topology.** Ann. of Math., II. s. 38, 39—56 (1937).

**Birkhoff, Garrett: The meaning of completeness.** Ann. of Math., II. s. 38, 57—60 (1937).

Die Menge von Punkten  $p_v$  heiße durch die Indizes  $v$  „gerichtet“, wenn für die Indizes  $v$  eine Relation  $u < v$  bzw.  $u \not< v$  so erklärt ist, daß aus  $u < v$  und  $v < w$  stets  $u < w$  folgt und daß es zu irgend zwei  $u, v$  stets ein  $w$  derart gibt, daß  $u < w \neq u$ ,  $v < w \neq v$ . (Man bemerke, daß dies allgemeiner als „teilweise Ordnung“ ist.) Ist  $T$  ein abstrakter topologischer Raum ( $= T_1$ -Raum), so heiße  $p$  aus  $T$  Limes der gerichteten Menge  $p_v$  von Punkten aus  $T$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $p$  ein  $a(U)$  derart gibt, daß alle  $p_v$  mit  $a(U) < v$  in  $U$  liegen. — Dann gilt: Dann und nur dann ist der Punkt  $p$  aus  $T$  Häufungspunkt der Teilmenge  $M$  von  $T$ , wenn  $M$  so gerichtet werden kann, daß  $p$  Limes der gerichteten Menge  $M$  wird; dann und nur dann ist  $M \leq T$  abgeschlossen, wenn  $M$  alle Limiten gerichteter Teilmengen von  $M$  enthält; dann und nur dann ist  $M \leq T$  offen, wenn keine außerhalb  $M$  gelegene gerichtete Menge einen Limes in  $M$  hat. — Dann und nur dann ist  $T$  ein Hausdorffscher Raum, wenn gerichtete Mengen in  $T$  höchstens einen Limes haben. — Eine Axiomatik der Hausdorffschen Räume mit „Limes gerichteter Menge“ als Grundbegriff wird gegeben, die die übliche Axiomatik der  $L$ -Räume verallgemeinert. — Das Hauptinteresse dieser Begriffsbildung liegt darin, daß sie es ermöglicht, die auf dem Begriff des Limes einer Folge beruhenden Vervollstndigungsprozesse zu verallgemeinern. *Reinhold Baer.*

## Mechanik.

**Bilimovitch, Antoine: Sur la géometrie des masses élevées à la puissance arbitraire.** Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 3, 189—206 (1936).

Considérant un système matériel composé des points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de masses respectives  $m_1, m_2, \dots, m_n$  l'Auteur définit comme centre d'inertie de l'ordre  $k$  le point  $C_k$  tel que

$$\sum_{i=1}^n m_i^k \overrightarrow{C_k P_i} = 0.$$

Lorsque l'exposant  $k$  varie, le point  $C_k$  décrit une courbe appelée „la centroide des masses“. Si les masses  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sont distinctes la centroide des masses joint le point de la plus petite masse ( $C_{-\infty}$ )  celui de la plus grande masse ( $C_{+\infty}$ ). — Introduisant d'une façon analogue les  $k$ -ième puissances des masses dans les définitions des moments et produits d'inertie, l'Auteur obtient les définitions des moments et produits d'inertie de l'ordre  $k$ . — Les définitions sont étendues au cas des systèmes à masses continuellement distribuées. *Prager (Istanbul).*



### Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

Weil, André: Les familles de courbes sur le tore. Rec. math. Moscou, N. s. 1. 779—781 (1936).

Verf. berichtet über verschiedene Gesichtspunkte, nach welchen die stetigen Strömungen auf dem Torus und verwandte Fragen studiert worden sind und werden können. Unter gewissen bekannten Voraussetzungen ist eine solche Strömung mit einer stetigen und eindeutigen Abbildung  $T$  der Kreislinie auf sich gekoppelt. Eine solche besitzt nach Poincaré eine Rotationszahl  $\alpha$ . Ist sie rational, so gibt es mindestens einen periodischen Punkt. Bei irrationalem  $\alpha$  sind entweder die Nachfolger jedes Punktes überall dicht. Oder aber die Punkte mit dieser Eigenschaft bilden eine nirgends dichte perfekte Menge. Der erste Fall tritt nach Denjoy immer ein, wenn  $T$  genügend glatt ist. — Verf. konstruiert die Rotationszahl durch Verlegung der Stromlinien auf dem Torus in die universelle  $x$ - $y$ -Überlagerungsebene  $E$ . Diese Methode liefert bei einzelnen stetigen Kurven (nicht notwendig Stromlinien) den Satz, daß, wenn die Kurve  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\theta < t < \infty$ , auf dem Torus keinen Doppelpunkt hat und in  $E$  gegen Unendlich strebt, sie dann einen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \arctg \frac{y}{x}$  besitzt. — Für Kurvenscharen auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $p > 1$  wird angekündigt: Sind die singulären Punkte der Schar sämtlich von negativem Index, so strebt jede Kurve, wenn man sie in die universelle Überlagerungsfläche (hyperbolischer Kreis) verlegt, gegen einen bestimmten Punkt im Unendlichen. — Ein anderer Gesichtspunkt ist maßtheoretischer Natur. Eine stetige Strömung auf einem kompakten metrischen Raum besitzt stets ein invariantes Normalmaß  $m$ . Der Beweis des Verf. ist kürzer als bei Kryloff und Bogoljuboff, jedenfalls bei einer einzelnen Abbildung. Im Spezialfall der Abbildungen  $T$  der Kreislinie auf sich mit irrationalem  $\alpha$  gibt es nur ein  $m$ . Von Interesse ist die Vermutung, daß bei genügend glattem  $T$  das Maß  $m$  durch ein gewöhnliches unbestimmtes Integral im Sinne von Lebesgue ausdrückbar ist. Hopf (Leipzig).

Husson, Ed.: L'aire couverte par une trajectoire dynamique; la presque-périodicité de la trajectoire. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 101—104 (1937).

Der Verf. macht einige Bemerkungen zum qualitativen Verlauf von nichtasymptotischen Bahnkurven, wenn das dynamische System integrierbar und von dem Charakter des Problems der geodätischen Linien auf Rotationsflächen ist. Durch Betrachtung der Fastperioden erhält er so eine Deutung der Approximationssätze von Dirichlet und Kronecker. Wintner (Baltimore).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff: Les mesures invariantes transitives dans la mécanique non linéaire. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 707—710 (1936).

Die Verff. skizzieren hier eine Vereinfachung der Beweismethode in ihrer wichtigen Arbeit über die Konstruktion und Klassifikation der invarianten Maße bei einer mechanischen Strömung,  $P \rightarrow P_t = T_t(P)$ , in einem kompakten metrischen Raume  $\Omega$ ;  $P_t$  ist stetig in  $(P, t)$ . Die invarianten Normalmaße  $m$  (ihre Existenz ist bewiesen),  $m(\Omega) = 1$ ,  $m(A_t) = m(A)$ , bilden nämlich einen konvexen Körper  $\mathfrak{R}$ . Aus einer Beschränktheit folgt die Existenz von solchen Randpunkten, die nicht auf der Verbindungslinie zweier Punkte des Körpers liegen können. Es zeigt sich, daß dieselben mit den transitiven Maßen der Strömung identisch sind. Da jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  Limespunkt (im Sinne der Konvergenzdefinition der Verff.) von Schwerpunkten solcher Randpunkte ist, ergibt sich direkt: Jedes invariante Normalmaß ist Limes von Linearkombinationen transitiver Maße. E. Hopf (Leipzig).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. Ann. of Math., II. s. 38, 65—113 (1937).

In den ergodentheoretischen Arbeiten der letzten Zeit wurde stets die Existenz eines invarianten Volummaßes im Phasenraum des mechanischen Systems voraus-

gesetzt. Diese Voraussetzung war sehr natürlich, da sie bei den meisten Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden erfüllt ist, mit entweder endlichem oder unendlichem Maß des ganzen Phasenraumes. — Mit Rücksicht auf gewisse Fälle mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Schwingungsprobleme) verzichten jedoch die Verff. auf jene Voraussetzung. Zugrunde gelegt wird lediglich eine in  $P, t$  stetige Strömung  $P \rightarrow P_t = T_t(P)$ ,  $T_s T_t = T_{s+t}$ , in einem kompakten metrischen Raume  $\Omega$ . Unter einem normierten Maße  $m$  auf  $\Omega$  ist ein auf allen Borelmengen von  $\Omega$  erklärtes, absolut additives Maß mit den Eigenschaften  $m(\Omega) = 1$  und

$$m(A) = \liminf m(0), \quad A \subset 0$$

für alle  $A$  enthaltenden offenen Mengen  $O$  verstanden. Solche Maße existieren, z. B. die in einzelnen Punkten von  $\Omega$  konzentrierten Maße. Es gibt sogar strömungsinvariante Maße,  $m(A_t) = m(A)$ . Dies, wie überhaupt die meisten Ergebnisse, beruht auf der „Kompaktheit“ des Raumes der Maße  $m$  im Sinne folgender Konvergenzdefinition:  $m_i \rightarrow m$  besteht dann und nur dann, wenn im gewöhnlichen Sinne

$$\int_{\Omega} f(P) dm_i(P) \rightarrow \int_{\Omega} f(P) dm(P)$$

für jede in  $\Omega$  stetige Funktion gilt. Durch Zeitmittelbildung erhält man aus einem gegebenen Maße immer invariante Maße. — Das Hauptresultat betrifft eine Zerlegung von  $\Omega$  in zwei invariante Teile,  $\Omega = \Omega_s + \Omega_w$  mit den folgenden Eigenschaften: Es ist

$$m(\Omega_w) = 0, \quad m(\Omega_s) = 1$$

für jedes normierte und invariante Maß  $m$ . Jeder Punkt  $P$  des „stationären“ Teiles  $\Omega_s$  genügt den Bedingungen:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(P_t) dt$$

existiert für jedes auf  $\Omega$  stetige  $f(Q)$ . Ferner gibt es (in einem allgemeineren als üblichen Sinne) eine mittlere Verweilzeit  $\varphi_P(A)$  von  $P_t$  in einer beliebigen Borelmenge  $A$ . Sie stellt ein invariantes normiertes Maß dar.  $\varphi_P(A)$  ist ferner für jedes  $P \subset \Omega_s$  ein transitives Maß, d. h.  $\Omega$  kann nicht in zwei invariante Borelmengen  $\Omega = B_1 + B_2$  mit  $\varphi_P(B_1) > 0$ ,  $\varphi_P(B_2) > 0$  zerlegt werden. Ferner hat jeder Punkt  $P$  von  $\Omega_s$  die Eigenschaft, daß  $\varphi_P(U) > 0$  für jede Umgebung  $U$  von  $P$  gilt (Verschärfung des Wiederkehrsatzes). Auf Grund dieser Eigenschaften ist eine Zerlegung von  $\Omega_s$ ,

$$\Omega_s = \sum \mathfrak{C}$$

in endlich oder unendlich viele invariante Teilmengen,  $\mathfrak{C}$ , die sog. absolut-ergodischen Teile möglich. Jedes  $\mathfrak{C}$  wird von allen Punkten  $P$  gebildet, welche dasselbe Maß  $\varphi_P(A) = m(A)$  liefern. Dann ist  $\varphi_P(\mathfrak{C}) = 1$ ,  $P \subset \mathfrak{C}$ . Innerhalb  $\mathfrak{C}$  gibt es überhaupt kein anderes normiertes Maß als  $\varphi_P(A) = m_{\mathfrak{C}}(A)$ . Es gilt

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(P_t) dt = \int_{\Omega} f(Q) dm_{\mathfrak{C}}(Q), \quad P \subset \mathfrak{C},$$

falls  $f(P)$  in  $\Omega$  stetig ist. Im Sinne obiger Konvergenz für Maße ist jedes invariante Maß  $m$  Limes konvexer Kombinationen

$$c_1 m_{\mathfrak{C}_1} + c_2 m_{\mathfrak{C}_2} + \dots + c_n m_{\mathfrak{C}_n}, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_1^n c_i = 1$$

von „Elementarmäßen“ obiger Art. — Andererseits sind die Punkte von  $\Omega_w$  wandernde Punkte in dem Sinne, daß die mittlere Verweilzeit (im üblichen Sinne) von  $P_t$  in  $O$  gleich Eins ist, wenn  $O$  eine beliebige,  $\Omega_s$  enthaltende offene Menge ist (statistische Konvergenz gegen die stationären Bewegungen). — Ref. zieht die Bezeichnung „absolut-ergodisch“ vor, denn im allgemeinen ist eine im üblichen Sinne, d. h. in bezug auf ein gegebenes invariantes  $m$ , ergodische Strömung noch weiter zerlegbar.

E. Hopf (Leipzig).



## Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

**Levi-Civita, Tullio:** *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo.* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari, 161—168 (1936).

Der Verf. betrachtet ein den dreidimensionalen Raum erfüllendes „inkohärentes“ Medium, das lediglich seiner eigenen Gravitation und nicht auch weiteren inneren Kräften unterworfen ist [allgemeine Existenzsätze bei L. Lichtenstein, *Math. Z.* **27**, 607—622 (1928), und Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, S. 127—133, Berlin 1931]. Nach Herleitung der Kontinuitätsgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung wird die Annahme eingeführt, daß der Ortsvektor der Geschwindigkeit für jedes  $t$  ein Gradient ist. Die dadurch vereinfachte Kontinuitätsgleichung ist eine partielle, kann aber, was die Bestimmung der Dichtefunktion anlangt, durch eine gewöhnliche ersetzt werden, wenn man annimmt, daß die Bewegung überall sehr langsam vor sich geht. Dieser Fall wird ausführlich diskutiert, und die Resultate dieser Diskussion werden mit den numerischen Verhältnissen im Milchstraßensystem verglichen. *Wintner* (Baltimore).

**Lorenz, H.:** *Elementare Prüfung der Laplaceschen Abschleuderungstheorie.* *Astron. Nachr.* **261**, 313—324 (1937).

A mathematically elementary treatment shows the possibility of the solar system having arisen from successive separations of matter from an originally large rotating star. In each such separation the star undergoes a non-homogeneous shrinking.

*D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

**Neronoff, N.:** *Sur une méthode de détermination des figures d'équilibre relatif, voisines des ellipsoïdes, d'une masse liquide homogène en rotation.* *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. **15**, 175—185 (1936).

Im Verfolg einer von Liapounoff — zwanzig Jahre vor seinem definitiven Existenzbeweis — gemachten Andeutung ermittelt Verf. algebraische Flächen vierter Ordnung, welche in erster Approximation die Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden homogenen Flüssigkeitsmasse in der Nachbarschaft eines gewissen Maclaurinschen Verzweigungsellipsoides darstellen.

*E. Hölder* (Leipzig).

**Gardedieu, Alex:** *Sur les masses fluides hétérogènes en rotation.* *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 98—101 (1937).

A study of the ellipsoidal figures of revolution of heterogeneous fluids with given moment of momentum. As pointed out by P. Dive (cf. the follow. rev.), however, the results are based on previous erroneous results of Véronnet.

*D. C. Lewis.*

**Dive, Pierre:** *Masse fluide hétérogène en rotation à moment cinétique donné.* *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 405—407 (1937).

A history of some misunderstandings in the theory of figures of rotating fluids (cf. the prec. rev.).

*D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

**Jankowski, K.:** *Hydrodynamische Grundlagen der Kosmogenie.* *Astron. Nachr.* **262**, 17—28 (1937).

Es handelt sich um einen Versuch, die Entstehung und Form von Rotationsbewegung von Himmelskörpern, insbesondere Spiralnebeln, zu erklären. Jedoch sind dem Ref. die physikalischen Voraussetzungen gänzlich unverständlich.

*E. Hopf.*

**Subbotin, M.:** *Sur le problème des deux corps de masses variables.* *Astron. J. Soviet Union* **13**, 554—561 (1936).

The previous results of Armellini on the behaviour of the distance between the two bodies as the time becomes infinite are generalized, especially with regard to the most general case where the sum of the masses is not necessarily monotonic.

*D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

**Dehalu, M., E. Goffin et H. Sauvenier:** *Sur la deuxième approximation du calcul d'une orbite planétaire.* *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **6**, 11—19 (1937).

Die von Stoyko [*Bull. Astron.* **7** (1932)] mitgeteilten Formeln zur Bahnbestimmung nach Hansen werden neu abgeleitet.

*Klose* (Berlin).

**Sinding, Erik:** Zur Bestimmung der ursprünglichen Gestalt parabelnaher Kometenbahnen. *Astron. Nachr.* **261**, 457—460 (1937).

Die in die Störungsrechnung einzuführende „effektive Gravitationskonstante“ ist  $k^2 \left[ 1 + \sum \frac{m_i}{\varrho_i^3/r_i^3} \frac{x(x-x_i) + y(y-y_i) + z(z-z_i)}{r\varrho_i} \right]$ . Die hiermit gerechneten Bahnachsen unterscheiden sich in einigen Fällen beträchtlich von den unter der Annahme unendlicher Entfernung bestimmten Werten. Aber nur bei einem der untersuchten Kometen geht die Hyperbelbahn bei Benutzung der effektiven Konstanten in eine Ellipse über. *Klose (Berlin).*

**Zessevitsh, V.:** On the construction of the tables for the calculation of orbits of eclipsing binaries in the case of „D“ hypothesis. *Publ. Observ. Astron. Univ. Leningrad* **6**, 46—65 (1936) [Russisch].

In the present paper a method of computation of the photometric phase of the eclipse ( $\alpha'$  and  $\alpha''$ ) is developed. The Weierstrass's functions  $\wp(u)$ ,  $\zeta(u)$  and  $\sigma(u)$  are used. In the first part of the paper the case of the partial eclipse and in the second part the case of the annular one is considered. *Autoreferat.*

## Klassische theoretische Physik.

● **Blasius, Heinrich:** Wärmelehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. 2. erw. Aufl. Hamburg: Boysen & Maasch 1937. VIII, 276 S. u. 101 Fig. RM. 7.50.

Die ersten 12 Abschnitte des Buches sind aus der ersten Auflage unverändert übernommen und wurden seinerzeit (dies. Zbl. **1**, 370) bereits besprochen. Neu kommen hinzu die Abschnitte: Zustandsgleichung und Gesetz der spez. Wärmen bei nichtidealen Gasen; Vermischte Aufgaben. Der erstere wendet die Hauptsätze auf nichtideale Gase an, wobei die mathematischen Hilfsmittel (partielle Ableitungen, Linienintegrale usw.) ad hoc entwickelt werden. Der letztere enthält u. a. die Theorie der Heißluftmaschine und der Lindemaschine, die T-s-Diagramme für Dämpfe, die Zustandsgleichung für feste Körper und eine elementare Herleitung der idealen Zustandsgleichung aus der kinetischen Gastheorie. *Fürth.*

**Rutgers, A. J., and S. A. Wouthuysen:** Zur Anwendung der Thermodynamik auf „Phasenumwandlungen“, welche sich auf ein endliches Temperaturgebiet erstrecken. *Physica* **4**, 235—244 (1937).

Zur thermodynamischen Behandlung unscharfer „Phasenumwandlungen“ (z. B. solcher, die durch einen „Buckel“ der spezifischen Wärme charakterisiert sind) wird ein fiktiver scharfer Phasenübergang eingeführt, dessen Temperatur durch die Bedingung festgelegt ist, daß die gesamte Entropieänderung bei der fiktiven Änderung gleich der wirklichen ist. Es wird gezeigt, daß dann Differentialgleichungen gelten, die den für scharfe Phasenumwandlungen bekannten (z. B. der Clausius-Clapeyron-Gleichung) analog sind. Die von Keesom und Ehrenfest für „Phasenumwandlungen 2. Ordnung“ gefundene Gleichung ist ein Sonderfall der hier abgeleiteten. Die Rechnungen werden am Fall der Umwandlung des flüssigen Heliums geprüft. *H. Ulich.*

**Goranson, Roy W.:** A thermodynamic treatment of systems, in particular of solutions, from the point of view of activity and related functions. *J. chem. Phys.* **5**, 107—112 (1937).

**Mayer, Joseph E.:** The statistical mechanics of condensing systems. I. *J. chem. Phys.* **5**, 67—73 (1937).

**Mayer, Joseph E., and Philip G. Ackermann:** The statistical mechanics of condensing systems. II. *J. chem. Phys.* **5**, 74—83 (1937).

Die freie Energie  $A$  und der Druck  $P$  als Funktionen der Temperatur  $T$  und des Volumens  $V$  in einem aus  $N$  identischen Molekülen zusammengesetzten System lassen sich auf Grund der Gleichungen  $A = -kT \ln Q$ ,  $P = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T$  aus dem Phasenintegral  $Q = \frac{1}{N! h^3} \int \dots \int e^{-H(p,q)/kT} dp_1 \dots dp_f dq_1 \dots dq_f$  berechnen, worin  $H(p, q)$  die



Hamiltonsche Funktion des Systems, durch den Ausdruck

$$H(p, q) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{i=j+1}^N \sum_j^{N-1} v_{ij}$$

gegeben ist. Hierbei ist angenommen, daß sich die gesamte potentielle Energie des Systems als Summe der potentiellen Energien  $v_{ij}$  aller möglichen Paare von Molekülen ansetzen läßt, die Funktionen der Koordinatendifferenzen dieser Moleküle allein sind. Die Berechnung ergibt, daß es bei genügend tiefer Temperatur ein Gebiet derselben gibt, worin  $P$  und  $A + PV$  unabhängig von  $V$  sind, was ein Kennzeichen eines sich kondensierenden Systems ist. Aus den angegebenen Formeln läßt sich der Druck und das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes als Funktion der Temperatur numerisch berechnen, wenn die Gestalt der Funktion  $v_{ij}$  gegeben ist. Unter der Annahme, daß zwischen den Molekülen Anziehungskräfte wirken, die mit der 7. Potenz der Entfernung abnehmen, wird diese Berechnung durchgeführt, wobei sich eine nicht unbefriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten über  $\text{CO}_2$  und  $\text{CH}_4$  ergibt.

Fürth (Prag).

### Elektrodynamik:

Serini, Rocco: Le equazioni di Maxwell e il sistema definitivo di unità. Scritti matematici off. a Luigi Berzolari 207—214 (1936).

Hoffmann, B., Winston E. Koek and M. H. L. Pryce: A geometrical interpretation of the method of a symmetrical components. J. Math. Physics, Massachusetts Institute of Technol. 15, 187—190 (1936).

Es handelt sich um die Auffindung der Strom- und Spannungsverteilung in einem nicht ausgeglichenen elektrischen Dreiphasensystem. In üblicher Weise werden die Komponenten des unausgeglichenen Systems (Ströme, Spannungen und Impedanzen) in drei Systeme von ausgeglichenen Dreiphasensystemen aufgelöst. Hierdurch ist das Problem zurückgeführt auf die Ermittlung von Strömen und Spannungen in ausgeglichenen Dreiphasensystemen. Die Auflösung fand bisher meistens graphisch statt. Kürzlich ist gezeigt worden [G. Kron, Gen. Electr. Rev. 38, 242 (1935)], daß diese Auflösung auf eine einzige Matrixoperation führt. Die Auflösung der drei linearen Gleichungen mit neun Koeffizienten, welche die drei Spannungen in den drei Stromkomponenten ausdrücken, kann in einfacher Weise als Matrixgleichung geschrieben werden. Alle Koeffizienten sind im allgemeinen komplex. Das Problem fällt zusammen mit der bekannten Hauptachsentransformation. Verff. arbeiten bis ins einzelne aus.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Piloty, H.: Über Reaktanz-Vierpole. Elektr. Nachr.-Techn. 14, 88—117 (1937).

Bernamont, J.: Fluctuations de potentiel aux bornes d'un conducteur métallique de faible volume parcouru par un courant. Ann. Physique 7, 71—140 (1937).

Die Schwankungserscheinungen der Elektrizität in elektrischen Leitern (Schrotraffekt und der von J. B. Johnson studierte Effekt) werden untersucht. Im theoretischen Teil wird eine allgemeine Theorie der Berechnung von Schwankungsgrößen gegeben mit Hilfe der Theorie der Funktionen in Korrelation (im Anschluß an Untersuchungen von Courtines, Congrès international d'électricité, 1932). Die Anwendung auf die Potentialschwankungen in einem stromlosen Widerstand gibt die von Nyquist [Physic. Rev. 32, 110 (1928)] aufgestellte Formel.

Bechert (Gießen).

### Optik:

Oseen, C. W.: Une méthode nouvelle de l'optique géométrique. Svenska Vetenskapsakad. Hdl., III. s. 15, Nr 6, 1—41 (1936).

Es handelt sich hier um die Berechnung der Brechung einer normalen Strahlenkongruenz an einer beliebigen Fläche auf invariantem Wege. Auf den ersten Blick könnte man allerdings glauben, daß diese Abhandlung, in der tatsächlich eine ungeheure

Summe von wertvoller Arbeit steckt, nur aus einem ungangbaren Gestrüpp unübersichtlicher Formeln besteht. Wenn man aber näher zusieht, so scheinen überall die leitenden Gedanken des Autors durch, die in einem durchaus gesunden Prinzip ihre Quelle haben. Nur glaube ich, daß durch eine geringe Modifikation der Methode viel Mühe erspart werden könnte. — Gleich zu Anfang wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß man jedem Punkt einer Normalenkongruenz ein begleitendes Dreikant zuordnen kann. Hierauf werden neun Größen  $\kappa_m^i$  definiert, deren Bedeutung nicht erklärt wird, die aber nichts anderes sind, als die Komponenten, nach den Hauptrichtungen des Dreikants, der Vektoren der drei Drehgeschwindigkeiten, die man erhält, wenn man das begleitende Dreikant in Richtung dieser drei Hauptrichtungen verschiebt. Wenn der Autor dieser geometrischen Deutung nachgegangen wäre, so hätte er ohne Rechnung die Eigenschaften der  $\kappa_m^i$ , die er ableitet, voraussagen können; außerdem hätte er nicht die  $\kappa_m^i$  als Komponenten eines Tensors angesprochen, was sie nicht sind. Das natürliche wäre nun, auf diesem selben Wege fortzuschreiten und die Darboux'sche kinematische Methode konsequent anzuwenden, für welche dieses Problem wie geschaffen ist. Dadurch würde man nur invariante Größen erhalten, und zwar sämtliche Invarianten, die durch sukzessive Differentiationen entstehen. Statt dessen werden die Ableitungen der  $\kappa_m^i$  einzeln berechnet und die Invarianten mühsam zusammengesucht. Es ist bewundernswürdig, daß der Autor auf diesem Wege sein Ziel erreicht und alle Resultate von Gullstrand und noch einiges mehr abgeleitet hat. Dies ist schon an sich sehr wertvoll, weil Gullstrand ohne großen Aufwand an Zeit, unmöglich zu lesen und auch dann sehr schwer zu verstehen ist. Der wertvollste Teil der vorliegenden Arbeit besteht aber in der Berechnung der beiden quadratischen Fundamentalformen für das „optische Bild“ einer Fläche, die im Felde des Instrumentes liegt und das folgendermaßen definiert wird: Man betrachte sämtliche Lichtbündel, die von den Punkten einer gegebenen Fläche ausgehen und bilde für jeden von ihnen eine Brennfläche auf der Bildseite des Instruments. Die Enveloppe dieser Schar von Brennflächen ist das gesuchte optische Bild.

*C. Carathéodory (München).*

**Herzberger, M.: Hamilton's characteristic function and Bruns' eiconal.** J. Opt. Soc. Amer. 27, 133—137 (1937).

**Synge, J. L.: Hamilton's characteristic function and Bruns' eiconal.** J. Opt. Soc. Amer. 27, 138—144 (1937).

## Astrophysik.

**Russell, Henry Norris: Model stars.** Bull. Amer. Math. Soc. 43, 49—77 (1937).

This lecture is a survey of the results that have been obtained by working out the theoretical properties of model stars and comparing them with the observed properties of actual stars. It gives a very clear statement of the significance of these results, a valuable comparison of the different points of view of the leading investigators, and a sketch of the chief problems now confronting workers on stellar constitution.

*W. H. McCrea (Belfast).*

**Chandrasekhar, S.: The occurrence of negative density gradients in stars and allied problems. I.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 97, 132—149 (1937).

The paper discusses the question as to how far the distribution of the energy sources affects the possible types of density distribution in the interior of stars. In the first instance the analysis is confined to stellar models in which

$$\eta = \frac{L(r)}{M(r)} \cdot \frac{M}{L} = \eta_0 T^\delta, \quad (\delta > 0),$$

where  $\eta_0$  is a constant and the other symbols have their usual meanings. For these models the integration of the equations of equilibrium is carried out explicitly to such an extent as to enable an analytical discussion and classification of the different types



of density distribution that can occur. Conditions for the occurrence of negative density gradients are given. Finally the results are generalized to models for which  $\eta = \eta_0 e^{\alpha T^\delta}$ . — A second paper is promised which will also discuss the stability of these models.

Steensholt (Princeton, N. J.).

**Ambarzumian, V.:** The effect of the absorption lines on the radiative equilibrium of the outer layers of the stars. Publ. Observ. Astron. Univ. Leningrad 6, 7—17 (1936).

This is an attack on the problem of the radiative equilibrium of the outer layers of a star when the absorption coefficient  $\kappa$  varies with wave-length. Existing theory is almost entirely restricted to the case of a constant absorption coefficient. The author considers two schematic laws of variation of  $\kappa$  (a)  $\kappa = \kappa_1$ , a constant, within a wave-length interval of length  $\omega_1$ ;  $\kappa = \kappa_2$ , a different constant, within a wave-length interval  $\omega_2$ , adjoining the interval  $\omega_1$ , and so on throughout the spectrum,  $\omega_1, \omega_2$  being constant and sufficiently small, (b)  $\kappa$  is a continuous periodic function  $\lambda$  of sufficiently small period  $\Delta$ . These laws are designed to give schematically the effect of line absorption. They admittedly do not take account of monochromatic scattering in the lines, but reasons are given for the profitableness of carrying out the calculations. These are carried out using the Schuster-Schwarzschild approximation, with local thermodynamic equilibrium, in the solution of the equations, and the results compared with those for constant  $\kappa$ . From the results for case (a) it is inferred that the darkening towards the limb in the continuous spectrum is greater than for  $\kappa = \text{constant}$ . In (b) it is shown that there is little difference for the function  $B(\tau)$ , the total intensity of black-body radiation at the temperature at optical depth  $\tau$ , for large values of  $\tau$ , but there may be a considerable difference when  $\tau$  is small. The mathematical treatment presents some interesting features, for which the paper should be consulted.

W. H. McCrea (Belfast).

**Mocknatsh, D.:** On the pressure of radiation in an expanding planetary nebula. Publ. Observ. Astron. Univ. Leningrad 6, 19—24 (1936).

This is a development of Ambarzumian's theory of the radiative equilibrium of a planetary nebula (this Zbl. 6, 134). He has shown how, in a nebula composed mainly of hydrogen, the ultraviolet radiation of the central star, beyond the limit of the Lyman series, is transformed into Lyman  $\alpha$ -radiation, and this in turn supplies most of the radiation pressure. The result is that the resultant radiation pressure is directed towards the central star for the inner part of the nebula, and away from it for the outer part. The object of the present paper is to calculate the position of the level at which the resultant radiation pressure vanishes. Ambarzumian's equations of radiative equilibrium are written down, and solved after the introduction of certain approximations. The critical level is then shown to occur at optical depth  $\tau_1 - \log \tau_1$ , measured from the outside in the ultraviolet radiation. This is finally translated into linear distance.

W. H. McCrea (Belfast).

## Quantentheorie.

**Holzapfel, Wilhelm:** Bemerkungen zur „statistischen Auffassung“ in der Quantenmechanik. Z. Physik 104, 357—380 (1937).

Der Verf. vertritt die Ansicht, daß der Formalismus der Quantenmechanik noch nicht die Notwendigkeit der „statistischen Auffassung“ begründe, sondern Möglichkeiten einer kausalen Determination offenlasse. — Unhaltbar ist jedoch sein Vorschlag, einem Teilchen mit der (normierten) Auffassung einen definierten Ort

$$\bar{r} = \int |\varphi(r)|^2 \cdot r \, dV \quad (1)$$

zuzuerkennen. Dies würde offenbar nicht nur eine Ergänzung der Aussagen der Wellenmechanik bedeuten, sondern vielmehr eine vollkommene Außerkraftsetzung der Wellenmechanik, welche behauptet, daß das Teilchen nicht nur am Orte  $\bar{r}$ , sondern auch

an jedem anderen Orte  $r$  mit  $\varphi(r) \neq 0$  gefunden werden kann: Offenbar würden sämtliche experimentellen Erfahrungen über die Beugung von Materiewellen durch Annahme von (1) unverständlich werden. Dieser Widerspruch mit dem Experiment kann nicht behoben werden durch den Versuch des Verf., (1) nur für den Fall des Vorhandenseins eines einzigen Teilchens anzunehmen und bei Vorhandensein mehrerer gleicher Teilchen eine kompliziertere Vorschrift einzuführen, die darauf hinausläuft, daß, wenn sehr viele Teilchen vorhanden sind, eine Dichteverteilung gemäß  $|\varphi(r)|^2$  besteht. Denn dieser Gedanke steht wiederum mit der experimentellen Erfahrung in Widerspruch, weil er eine Abhängigkeit der Interferenzerscheinungen von der Intensität der betreffenden Materiestrahlen ergeben würde.

*P. Jordan (Rostock).*

**Stueckelberg, E. C. G.: Neutrino theory of light.** *Nature* **139**, 198—199 (1937).

Es wird auf eine Lücke in Focks Unmöglichkeitsbeweis der Neutrinotheorie des Lichts (dies. Zbl. **15**, 379) hingewiesen, die mit der unendlichen Anzahl von Neutrinos in Zuständen negativer Energie zusammenhängt.

*O. Klein (Stockholm).*

**Kofink, W.: Statistische Thermodynamik unter Zugrundelegung der Quantenmechanik in Hartreescher Näherung.** *Ann. Physik*, V. F. **28**, 264—296 (1937).

$W^{(n)}(q_1, \dots, q_k; \beta)$  möge die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthalt von  $k$  Teilchen aus einem System von  $n$  Teilchen an bestimmten Stellen des Raumes bezeichnen, wobei das System als kanonische Gesamtheit aufgefaßt wird, die mit einem Wärmebad der Temperatur  $T$  im Gleichgewicht steht ( $\beta = 1/kT$ ).  $\varepsilon_\mu$  und  $\psi_\mu$  seien die Eigenwerte und orthogonalen, normierten Eigenfunktionen der Einzelteilchen.  $\sigma(\beta) = \sum e^{-\varepsilon_\mu \beta}$

ist dann die Zustandssumme des Einzelteilchens und  $S(q, q; \beta) = \sum_\mu e^{-\varepsilon_\mu \beta} |\psi_\mu(q)|^2$  die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Einzelteilchens. Es bedeutet schließlich  $E_\nu$  den  $\nu$ -ten Eigenwert des Gesamtsystems und  $Z = \sum_\nu e^{-E_\nu \beta}$  die Zustandssumme des Gesamtsystems.

In der Hartreeschen Näherung, bei der sich die Eigenfunktionen des Gesamtsystems aus denen der Einzelsysteme zusammensetzen, läßt sich die folgende allgemeine

Formel ableiten:  $W^{(n)}(q) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n r S(q, q; r \beta) \frac{\partial Z}{\partial \sigma(r \beta)}$ . Von dieser kann man dann

durch Differentiationen sukzessive zu den Formeln für  $W^{(n)}(q_1 \dots q_k; \beta)$  übergehen. Die Verteilung der kanonischen Gesamtheit ist demnach angebar, wenn die Zustandssummen und die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Einzelteilchen und die Symmetrie des Gesamtsystems bekannt sind. Zur Berechnung von  $Z$  werden gruppentheoretische Methoden herangezogen. Als Spezialfälle erhält man aus der allgemeinen Theorie die Verteilungen für die Bose-, die Fermi- und die Boltzmannstatistik. Ferner kommt man durch Grenzübergang zu verschwindend kleinen  $T$  im Spezialfalle eines antisymmetrischen Gesamtsystems zu bereits früher von Dirac angegebenen Formeln für die Wahrscheinlichkeitsdichte.

*Fürth (Prag).*

**Bethe, H. A., and M. E. Rose: Kinetic energy of nuclei in the Hartree model.** *Physic. Rev.*, II. s. **51**, 283—285 (1937).

Beschreibt man einen Atomkern durch einen Potentialtopf  $V = c \cdot r^2$ , so wird die Eigenfunktion ein Produkt von Oszillatoreigenfunktionen der einzelnen Teilchen. Bei einem Zustand, der durch eine derartige Eigenfunktion beschrieben wird, ruht der Schwerpunkt des Gesamtsystems nicht, sondern führt noch eine „Wackelbewegung“ aus, deren kinetische Energie berechnet wird. Ist der Kern im Grundzustand, d. h. alle Niveaus bis zu einer oberen Grenze hin lückenlos besetzt, so wird diese Schwerpunktsenergie gleich der Energie eines Teilchens im tiefsten (1s-) Zustand. Die gesamte nach dem Oszillatormodell berechnete kinetische Energie eines Kerns kann also in zwei Summanden zerlegt werden: die Energie der „Wackelbewegung“ und den Rest, der allein zum Massendefekt des Kerns beiträgt.

*S. Flügge (Leipzig).*



Feenberg, E., and E. Wigner: On the structure of the nuclei between helium and oxygen. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 95—106 (1937).

Die Verf. versuchen eine Deutung der Eigenschaften der Kerne zwischen Helium und Sauerstoff. Neben den Austauschkräften zwischen Proton und Neutron, allgemein einer Summe von Heisenberg- und Majoranakräften, werden noch Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen angenommen. Für letztere werden drei verschiedene Ansätze gemacht und die Energien der niedrigsten stationären Zustände mit Hilfe der Methode von Hartree-Fock berechnet. Die Theorie gibt die Impulsmomente der Grundzustände richtig wieder. Auch zeigt sich qualitativ eine relativ besonders große Stabilität der Kerne, die ausschließlich als aus  $\alpha$ -Teilchen aufgebaut gedacht werden können. Ferner ergeben sich neue Hinweise auf die Existenz von Heisenbergkräften, wie sie schon durch den energetischen Abstand zwischen Singulett- und Triplettterm des Deuterons wahrscheinlich gemacht war. Ob die Kräfte zwischen Protonen einerseits und zwischen Neutronen andererseits, von der Coulombschen Wechselwirkung abgesehen, voneinander abweichen, kann auf Grund der Ungenauigkeit der Rechnungen vorläufig nicht entschieden werden.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wentzel, G.: Zur Frage der  $\beta$ -Wechselwirkung. *Helv. physica Acta* 10, 107—111 (1937).

Verf. bespricht die Möglichkeit, die Fermische Theorie des  $\beta$ -Zerfalls durch solche Terme in der Wechselwirkung zwischen schweren und leichten Teilchen zu ergänzen, daß auch die folgenden Prozesse auftreten können:

$$\begin{array}{ll} P \rightarrow P' + e + p, & N \rightarrow N' + e + p, \\ P \rightarrow P' + n + a, & N \rightarrow N' + n + a \end{array}$$

( $P$  = Proton,  $N$  = Neutron,  $e$  = Elektron,  $p$  = Positron,  $n$  = Neutrino,  $a$  = Antineutrino). Vorausgesetzt, daß die Matricelemente der Wechselwirkung, die diesen Übergängen entsprechen, von derselben Größenordnung sind wie die für den gewöhnlichen  $\beta$ -Zerfall verantwortlichen Matricelemente, dürfte zwar der experimentelle Nachweis obiger Prozesse praktisch nicht durchführbar sein; denn die betreffenden Änderungen der schweren Teilchen werden im allgemeinen zufolge ihrer Koppelung an das Strahlungsfeld, d. h. unter Aussendung von  $\gamma$ -Quanten, mit viel größerer Häufigkeit stattfinden. Dagegen sollten sich in den Nahewirkungskräften zwischen den schweren Teilchen wesentliche Änderungen ergeben, indem neben der Austauschkraft zwischen Proton und Neutron jetzt auch Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen vorkommen, deren Existenz durch die Versuche über Streuung von Protonen an Protonen wahrscheinlich gemacht wird. Art und Größe dieser Kräfte werden kurz erörtert.

R. de L. Kronig (Groningen).

Fierz, Markus: Zur Fermischen Theorie des  $\beta$ -Zerfalls. *Z. Physik* 104, 553—565 (1937).

Es werden zunächst die möglichen relativistisch invarianten Ansätze für die Wechselwirkung zwischen schweren und leichten Teilchen in der Fermischen Theorie des  $\beta$ -Zerfalls besprochen, wobei vorausgesetzt ist, daß Ableitungen der Wellenfunktionen nicht auftreten (s. vorst. Ref.). Es gibt im ganzen fünf linear unabhängige Invarianten, die noch beliebig linear kombiniert werden können. Es wird die Form des kontinuierlichen  $\beta$ -Spektrums aus dem allgemeinsten Ansatz abgeleitet und auf die mangelhafte Übereinstimmung mit experimentellen Daten hingewiesen. Sodann wird die Natur der Kernkräfte erörtert, ebenfalls auf Grund des allgemeinsten Ansatzes. Durch spezielle Wahl der Konstanten, mit denen die oben erwähnten Invarianten multipliziert erscheinen, kann man bestimmte Typen von Kräften, z. B. reine Heisenbergkräfte oder reine Majoranakräfte erzeugen. Schließlich folgen Betrachtungen über das magnetische Moment der schweren Teilchen, denen jedoch Verf. selbst wegen der bekannten Konvergenzschwierigkeiten kaum eine physikalische Bedeutung zuerkennt.

R. de L. Kronig (Groningen).



**Fierz, Markus:** Über die Quantisierung von Theorien des  $\beta$ -Zerfalls. *Helv. physica Acta* **10**, 123—129 (1937).

Verf. untersucht, inwiefern es möglich ist, in dem Anteil der Lagrangefunktion, welcher beim  $\beta$ -Zerfall radioaktiver Kerne die Wechselwirkung zwischen schweren und leichten Teilchen regelt, auch Abgeleitete der Wellenfunktionen dieser Teilchen nach den Raumkoordinaten und der Zeit zuzulassen. Zunächst wird darauf hingewiesen, daß überhaupt höchstens erste Abgeleitete nach der Zeit und damit, wegen der Forderung relativistischer Invarianz, auch nur erste Abgeleitete nach den Koordinaten, und zwar nur linear, auftreten können. Anderenfalls werden die Wellengleichungen, die aus dem Variationsprinzip für die Lagrangefunktion folgen, von höherer als erster Ordnung, was mit der Einführung eines neuen Freiheitsgrades, d. h. im wesentlichen von neuen Teilchenarten gleichbedeutend wäre. Es bleibt dann als einziger Ausdruck für die Wechselwirkung neben dem ursprünglichen Fermischen Ansatz ohne Abgeleitete nur der Ansatz von Konopinski und Uhlenbeck ( $K-U$ ) mit einer ersten Abgeleiteten übrig. Aus der Form der Hamiltonfunktion, wie sie sich in der üblichen Weise aus der Lagrangefunktion ergibt, können direkt die zu den Wellenfunktionen  $\psi$  der einzelnen Teilchenarten kanonisch konjugierten Größen  $\pi$  gefunden werden. Diese sind beim Ansatz von  $K-U$  nicht mehr mit den komplex Konjugierten  $\psi^*$  identisch. Die  $\psi$  und  $\pi$  müssen nun Vertauschungsrelationen solcher Art unterworfen werden, daß die Wellengleichungen mit Hilfe des Energiesatzes daraus folgen. Es gibt dafür zwei Möglichkeiten, die im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung der Boseschen und der Fermischen Statistik entsprechen. Verf. beweist, und dies ist das wesentliche Ergebnis seiner Untersuchung, daß es im letzteren Falle unmöglich ist, außer für verschwindende Wechselwirkung vom Typus  $K-U$ , die Vertauschungsrelationen zu befriedigen. Der Ansatz von  $K-U$  ist also für Teilchen, die dem Pauliprinzip genügen, nicht widerspruchsfrei durchführbar.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Joos, Georg, und Karl Heinz Hellwege:** Linienspektren der Atome. *Physik* regeln. *Ber.* **5**, 33—41 (1937).

**Stevenson, A. F.:** Spherical symmetry of self-consistent atomic fields. *Physic. Rev.*, **II**, s. **51**, 285—287 (1937).

In der Methode des self-consistent field für ein Atom wird gewöhnlich so gerechnet, als ob sich jedes Elektron in einem kugelsymmetrischen Potentialfeld bewegte. Das trifft in der Regel nicht zu, da ja nur  $s$ -Elektronen und abgeschlossene Schalen ein kugelsymmetrisches Potential für die übrigen Teilchen ergeben. Es wird gezeigt, wie man durch eine geeignete Mittelung über alle Richtungen das Rechenverfahren möglichst konsequent gestalten kann.

*S. Flügge* (Leipzig).

**Frame, J. W.:** On the excitation of a lithium atom by collision with a slow  $\alpha$ -particle. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **33**, 115—121 (1937).

Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeit der Anregung eines Li-Atoms in einen  $2p$ -Zustand beim Stoß mit einem  $\alpha$ -Teilchen. Benutzt wird die wellenmechanische Formel von Mott; die Wellenfunktion des Grundzustandes (Elektron im Felde des Li-Kernes und des  $\alpha$ -Teilchens) wird dazu genähert berechnet, für den angeregten Zustand werden die entsprechenden Eielektron-Wellenfunktionen benutzt. Ein Vergleich des so berechneten Anregungs-Wirkungsquerschnittes mit dem nach der Bornschen Formel berechneten zeigt, daß die Bornsche Näherung bei kleinen Geschwindigkeiten der  $\alpha$ -Teilchen ( $10^9$  cm/sec) viel zu hohe Werte liefert. *Henneberg* (Berlin).

**Gropper, Leon:** Quantum theory of the second virial coefficient. *Physic. Rev.*, **II**, s. **1**, 50 (1937).

In einer vorhergehenden Arbeit [*Physic. Rev.* **50**, 963 (1936); dies. Zbl. **15**, 331] wurde eine exakte quantentheoretische Formel für den zweiten Virialkoeffizienten eines Einstein-Bose-Gases gegeben, aus der die Abhängigkeit dieser Größe von der Temperatur berechnet werden kann, wenn die Gestalt des Potentialwalles der Atome gegeben ist. Diese Berechnungen wurden nun seither für einen Wall von rechteckiger



Gestalt durchgeführt und das Resultat mit einer in der ersten Arbeit angegebene Näherungsformel verglichen. Die Abweichungen werden um so kleiner, je niedriger die Temperatur ist. *Fürth (Prag).*

**Blochinzew, D.:** Zur Theorie der gefärbten Kristalle. *Physik. Z. Sowjetunion* 10, 431—441 (1936).

Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen die Anregung eines lokalisierten Atoms im Kristallgitter (unter gleichzeitiger Deformation des Gitters in der Umgebung des Atoms) möglich ist. Ein solches „F-Zentrum“ kann nur dann im Kristall bewegt werden, wenn die Deformation durch die Wärmebewegung lokal ausgeglichen wird. Dies ergibt einen vernünftigen Wert für die Beweglichkeit. Eine optische Befreiung eines solchen lokalisierten Elektrons würde eine neue Anregung und damit eine größere Energie erfordern, in Übereinstimmung mit der Erfahrung an gefärbten Kristallen. *Nordheim (Lafayette, Ind.).*

**Schubin, S., und S. Wonsowsky:** Zur Elektronentheorie der Metalle. II. *Physik. Z. Sowjetunion* 10, 348—377 (1936).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [*Physik. Z. Sowjetunion* 7, 292 (1935); *Zbl. 11*, 428] werden die Elektronenzustände in einem Kristallgitter nach der Heitler-Londonischen Methode unter Berücksichtigung der polaren Zustände (zwei oder kein Elektronen an einem Platz) behandelt. Die Auflösung der Säkulargleichungen gelingt nur unter recht speziellen Annahmen. Anwendungen werden nicht gegeben. *Nordheim (Lafayette, Ind.).*

**Landau, L., und I. Pomerantschuk:** Über die Eigenschaften der Metalle bei sehr niedrigen Temperaturen. *Physik. Z. Sowjetunion* 10, 649—665 (1936).

Es wird gezeigt, daß die Coulombsche Wechselwirkung zwischen den Leitungselektronen bei tiefen Temperaturen zu einem Glied proportional zu  $T^2$  führt, das also für genügend kleine  $T$  gegenüber dem normalen  $T^5$ -Glied überwiegt. Es werden ferner die thermoelektrischen Effekte bei tiefen  $T$  behandelt und gezeigt, daß die thermodynamischen Beziehungen erfüllt sind und daß für reine Metalle die Thermokraft proportional zur Temperatur wird. Der Einfluß eines Restwiderstandes wird qualitativ diskutiert. *Nordheim (Lafayette-Ind.).*

**Peterson, E. L., and L. W. Nordheim:** Resistance of monovalent metals. *Physic. Rev., II. s.* 51, 355—364 (1937).

In die Theorie der elektrischen Leitfähigkeit von Metallen geht eine Konstante ein, die die Wechselwirkung zwischen den elastischen Wellen und den Leitungselektronen beschreibt. Diese Konstante war bisher unbestimmt gelassen, da keine genügend genauen Wellenfunktionen für die Metallelektronen bekannt waren. Die Verf. weisen darauf hin, daß mit Benutzung der Wigner-Seitzschen Wellenfunktionen ein Wert herauskommt, der etwa 9 mal größer ist als der empirisch bestimmte. Dies wird damit erklärt, daß die in der allgemeinen Formel für die Wechselwirkung benutzte Störungsrechnung nicht anwendbar ist, da die Schwingungsamplituden nicht mehr klein gegenüber den Dimensionen der inneren Schalen des Atoms sind. Es wird eine neue Berechnungsmethode vorgeschlagen, die darauf Anspruch erhebt, genauer als die erwähnte Störungsrechnung zu sein, und diese Methode führt zu einem Werte, der annähernd mit den empirischen übereinstimmt. *R. Peierls (Cambridge).*

**Fröhlich, H.:** A quantum mechanical discussion of the cohesive forces and thermal expansion coefficients of the alkali metals. *Proc. Roy. Soc. London A* 158, 97—110 (1937).

Es wird eine analytische Methode zur angenäherten Lösung der Wigner-Seitzschen Gleichungen für die Bewegung von Elektronen in Metallen entwickelt. Diese Methodemacht von der Tatsache Gebrauch, daß die Eigenfunktionen in einem großen Bereich angenähert konstant sind. Die Anwendbarkeit der Methode wird zunächst dadurch geprüft, daß die Resultate für die Gitterenergie und den Atomabstand mit der strengeren Rechnung verglichen werden. Ferner wird die Methode zur Berechnung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten verwendet. *R. Peierls (Cambridge).*